

Original Research Paper

Precise Attitude Determination of a Low-Earth Orbit, Nano Satellite Based on Sun Sensor, Magnetometer and Gyroscope

Mohamad Siahatgar* and Ghasem Kahe 

Aerospace Research Institute, Ministry of Science, Research and Technology, Tehran, Iran

ARTICLE INFO**Article History**

Received 09 December 2025

Revised 10 July 2026

Accepted 30 July 2026

Available Online 07 October 2026

Keywords

Extended Kalman Filter

Attitude determination

Sun sensor

Attitude dynamics

Eclipse period

ABSTRACT

Attitude determination is a key requirement for mission success in small satellites, particularly during orbital injection and early operational phases. However, stringent constraints on mass, power, and cost make the design of accurate and reliable attitude determination systems challenging. To address these constraints, this study proposes a low-cost sensor fusion architecture based on gyroscopes, a sun sensor, and a magnetometer. The gyroscope provides high-bandwidth angular rate measurements for short-term attitude propagation, while the sun sensor supplies periodic absolute attitude information and mitigates long-term gyro drift. During eclipse periods, when the sun sensor is unavailable, the magnetometer serves as an alternative measurement source and also complements the sun sensor to enhance estimation accuracy. Since magnetic disturbances and solar activity can degrade magnetometer performance, the proposed fusion strategy is designed to maintain both estimation accuracy and robustness under sensor degradation or partial failure. An Extended Kalman Filter is implemented to estimate spacecraft attitude. The filter propagates the attitude using the rotational kinematic model driven by gyro measurements and updates the estimate using sun sensor and magnetometer observations. Simulation results under multiple operational scenarios demonstrate that the proposed algorithm achieves accurate attitude estimation while maintaining robustness against disturbances and varying environmental conditions.

*Corresponding Author's E-mail: siahatgar@ymail.com**How to Cite this Article:**

M. Siahatgar, G. Kahe, "Precise attitude determination of a low-earth orbit, nano satellite based on sun sensor, magnetometer and gyroscope," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. VV, NN, pp. 1-16, 2026, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jsst.2026.1609>.

**COPYRIGHTS**

© 2026 by the authors. Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



مقاله پژوهشی

تعیین وضعیت دقیق یک ماهواره کوچک چرخان در مدار پایین با استفاده از حسگرهای خورشید، مغناطیس سنج و ژيروسکوپ

محمد سیاحتگر^{۱*} و قاسم کاهاه^۲ 

^۱-دانشجوی دکتری، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

^۲-استادیار، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

چکیده

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۸ آذر ۱۴۰۴

بازنگری ۱۹ تیر ۱۴۰۵

پذیرش ۸ مرداد ۱۴۰۵

اولین انتشار ۱۵ مهر ۱۴۰۵

واژه‌های کلیدی:

فیلتر کالمن توسعه یافته

تعیین وضعیت

حسگر خورشید

دینامیک وضعیت

دوره کسوف

تعیین وضعیت در ماهواره‌ها، به‌ویژه در مراحل تزریق و استقرار در مدار، نقش بسیار مهمی در موفقیت مأموریت فضایی ایفا می‌کند. از این رو، طراحی حسگرها و الگوریتم‌های تعیین وضعیت همواره مورد توجه پژوهشگران و صنایع فضایی بوده است. در ماهواره‌های کوچک، محدودیت‌های جرم، توان مصرفی و هزینه، در کنار نیاز به دقت و قابلیت اطمینان مناسب، از مهم‌ترین چالش‌های طراحی سامانه تعیین وضعیت محسوب می‌شوند. این محدودیت‌ها موجب شده است معماری‌ها و الگوریتم‌های متنوعی برای دستیابی هم‌زمان به دقت مناسب و هزینه پایین ارائه شوند. در این پژوهش، ترکیبی از حسگرهای ژيروسکوپ، حسگر خورشید و مغناطیس سنج برای سامانه تعیین وضعیت یک ماهواره کوچک ارائه شده است تا ضمن کاهش هزینه و جرم سامانه، دقت و قابلیت اطمینان مناسبی نیز فراهم شود. در این ساختار، حسگرها علاوه بر ایفای نقش اصلی خود، به‌عنوان حسگرهای مکمل و افزونه نیز عمل می‌کنند تا در شرایط خرابی یا افت عملکرد برخی حسگرها، قابلیت اطمینان سامانه حفظ شود. ژيروسکوپ با پهنای باند بالا قادر است تغییرات سریع نرخ زاویه‌ای را در بازه‌های زمانی کوتاه با دقت مناسب اندازه‌گیری کند. حسگر خورشید نیز به‌صورت دوره‌ای اطلاعات دقیقی از وضعیت ماهواره نسبت به خورشید فراهم کرده و در عین حال موجب جبران دررفت زمانی ژيروسکوپ می‌شود. مغناطیس سنج در شرایط کسوف، که حسگر خورشید فاقد اندازه‌گیری معتبر است، به‌عنوان جایگزین مورد استفاده قرار می‌گیرد و همچنین به‌عنوان مکمل حسگر خورشید در افزایش دقت تخمین وضعیت نقش دارد. با این حال، اغتشاشات مغناطیسی و طوفان‌های خورشیدی می‌توانند عملکرد مغناطیس سنج را تحت تأثیر قرار دهند؛ بنابراین حسگرهای دیگر باید کاهش دقت آن را جبران کنند. در نتیجه، تلفیق اطلاعات این حسگرها باید به‌گونه‌ای انجام شود که علاوه بر دستیابی به دقت مطلوب، قابلیت اطمینان لازم در برابر خرابی و افت عملکرد حسگرها نیز تأمین گردد. در این پژوهش، فیلتر کالمن توسعه‌یافته با استفاده از مدل سینماتیکی حرکت دورانی و داده‌های ژيروسکوپ، وضعیت ماهواره را پیش‌بینی کرده و سپس با بهره‌گیری از اندازه‌گیری‌های حسگر خورشید و مغناطیس سنج، تخمین وضعیت را اصلاح می‌کند. نتایج حاصل از سناریوهای مختلف شبیه‌سازی نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی قادر است وضعیت ماهواره را با دقت مناسب تخمین زده و در برابر اختلالات و شرایط عملکردی مختلف از پایداری و مقاومت مطلوبی برخوردار باشد.

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: siahatgar@gmail.com

How to Cite this Article:

M. Siahatgar, G. Kahe, "Precise attitude determination of a low-earth orbit, nano satellite based on sun sensor, magnetometer and gyroscope," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. VV, NN, pp. 1-16, 2026, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jsst.2026.1609>.



COPYRIGHTS

© 2026 by the authors. Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



۱ مقدمه

نانو ماهواره‌ها، فضاییماهای کوچک با جرم ۱ تا ۱۰ کیلوگرم می‌باشند، این نوع ماهواره‌ها به دلیل وزن کم، چرخه توسعه کوتاه، هزینه توسعه پایین و عملکرد بالا، یک فناوری بسیار کاربردی و برجسته در حوزه فضایی هستند و به همین دلیل پیاده‌سازی یک سامانه تعیین وضعیت دقیق و مطمئن در نانو ماهواره‌ها به دلیل منابع محدود آن‌ها یک چالش اساسی می‌باشد [۱، ۲]. وضعیت نانو ماهواره به کمک الگوریتم‌های تعیین وضعیت که از ترکیب داده‌های حسگرها بهره می‌برد، تخمین زده می‌شود [۳، ۴]. حسگرهای تعیین وضعیت ماهواره، بخش اصلی نانو ماهواره بشمار می‌آیند چرا که مستقیماً بر عملکرد ماهواره و محموله‌های آن تأثیر می‌گذارند. حسگرهای تعیین وضعیت که معمولاً در ماهواره‌ها بکار گرفته می‌شوند شامل حسگر ستاره، حسگر خورشید، مغناطیس سنج، ژيروسکوپ و غیره هستند، اما هر یک از این حسگرها به سختی می‌توانند الزامات تعیین وضعیت نانو ماهواره‌ها را برآورده کنند [۵]. دقت اندازه‌گیری ژيروسکوپ که برای اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای استفاده می‌شود، در یک مدت زمانی کوتاه مطلوب است و می‌تواند اطلاعات وضعیت را بصورت پیوسته تولید کند، اما در دراز مدت به دلیل دریافت زمانی ژيروسکوپ، انباشتگی خطا بوجود می‌آید [۶، ۷]. حسگرهای اندازه‌گیری وضعیت مانند حسگر ستاره، حسگر خورشید و مغناطیس سنج مشکل انباشتگی خطا را ندارند، اما نمی‌توانند اطلاعات وضعیت را با پهنای باند مطلوب تولید کنند، ضمن این که اختلالات الکترومغناطیسی، طوفان‌های خورشیدی و دوره کسوف ماهواره کارکرد صحیح این حسگرها را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بنابراین، برای بهبود دقت تعیین وضعیت نانو ماهواره، یک حسگر تعیین وضعیت یکپارچه متشکل از حسگرهای زاویه و حسگرهای سرعت زاویه‌ای در کنار یکدیگر استفاده می‌شوند. به این ترتیب حسگرهای تعیین وضعیت و حسگرهای سرعت زاویه‌ای می‌توانند مزایا و معایب یکدیگر را پوشش دهند [۸، ۹]. ژيروسکوپ، حسگر خورشید و مغناطیس سنج یک مجموعه کمینه و ارزان قیمت برای تعیین وضعیت ماهواره را تشکیل می‌دهند؛ حسگر خورشید رسیدن به دقت مطلوب را تضمین می‌کند، حسگر مغناطیس-سنج می‌تواند در دوره کسوف ماهواره، اطلاعات وضعیتی را فراهم نماید و ژيروسکوپ نیز ضمن فراهم نمودن اطلاعات وضعیتی با پهنای باند مطلوب، تأثیرات ناشی از اختلالات ذکر شده را کاهش دهد. در نهایت، به منظور ترکیب داده‌های اندازه‌گیری ژيروسکوپ، مغناطیس سنج و حسگر خورشید، فیلتر کالمن توسعه یافته بکارگرفته می‌شود [۱۰].

در این پژوهش ترکیبی از حسگرهای جاییرو، حسگر خورشید و مغناطیس سنج به منظور کمینه نمودن هزینه و وزن برای سامانه تعیین

اختصارات

A	ماتریس ژاکوبین حالت سیستم
b_g	بایاس ژيروسکوپ
b_m	بایاس مغناطیس سنج
b_s	بایاس حسگر خورشید
C_b^i	ماتریس انتقال قاب بدنه به اینرسی
$C_{b(t+\delta t)}^{b(t)}$	دوران لحظه‌ای در مدت زمان δt
$\dot{C}_b^i$	مشتق زمانی ماتریس انتقال
F	ماتریس گذر حالت سیستم
H	ماتریس ژاکوبین مشاهدات
K	بهره فیلتر کالمن
m_b	مقدار میدان مغناطیسی در دستگاه مختصات بدنه
P	ماتریس کواریانس حالت
q	کوآرنیون وضعیت
Q	ماتریس کوواریانس نویز فرآیند
S_b	بردار خورشید بدست آمده از حسگر خورشید
S_o	بردار خورشید در سیستم مختصات مدار ماهواره
V_g	بردار نویز اندازه‌گیری ژيروسکوپ
V_m	نویز سفید اندازه‌گیری مغناطیس سنج
V_s	نویز اندازه‌گیری حسگر خورشید
w	بردار نویز فرآیند
x	بردار حالت
z	بردار اندازه‌گیری
$\delta\theta_b$	دوران اندازه‌گیری شده توسط ژایرو پس از حذف بایاس
Ω_{ib}^b	ماتریس پادمتقارن سرعت زاویه‌ای
ω_{ib}^b	سرعت زاویه‌ای واقعی ماهواره نسبت به فضای اینرسی
$\hat{\omega}_{ib}^b$	سرعت زاویه‌ای تخمینی ماهواره نسبت به فضای اینرسی

حسگر در راستای محورهای اصلی بدنه، خروجی ژيروسکوپ شامل مقدار واقعی سرعت زاویه‌ای، بایاس و نویز سفید اندازه‌گیری است. مدل ریاضی ژيروسکوپ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + b_g + v_g \quad (1)$$

که ω_{ib}^b بردار سرعت زاویه‌ای واقعی ماهواره نسبت به اینرسی در قاب بدنی، b_g بردار بایاس ژيروسکوپ و v_g نویز سفید ژيروسکوپ می‌باشد. از آنجایی که بایاس ژيروسکوپ در طول زمان تغییر می‌کند، برای افزایش دقت تخمین، تغییرات آن معمولاً به صورت یک فرایند گام تصادفی^۱ مدل‌سازی می‌شود:

$$\dot{b}_g = n_{bg} \quad (2)$$

که در اینجا n_{bg} نویز فرایند مربوط به ناپایداری بایاس است.

۲-۲ مغناطیس سنج

مغناطیس سنج شدت و جهت میدان مغناطیسی زمین را در قاب بدنی ماهواره اندازه می‌گیرد. این اندازه‌گیری با مقایسه با مدل مرجع جهانی میدان مغناطیسی، یکی از بردارهای مرجع برای تعیین وضعیت را فراهم می‌کند. به عبارت بهتر، میدان مغناطیسی زمین، یک میدان برداری است بطوری که بردار شدت این میدان در هر نقطه از ژئوفضا با نقطه دیگر متفاوت است و با طول و عرض جغرافیایی آن نقطه مطابقت دارد. بنابراین، می‌توان با تعیین دقیق موقعیت هر نقطه در ژئوفضا، وضعیت ماهواره را تعیین کرد، سپس با جستجو در جدول مغناطیسی، بردار میدان مغناطیسی در سیستم مختصات زمینی بدست می‌آید.

در صورتی که محور اندازه‌گیری مغناطیس سنج در راستای دستگاه مختصات بدنه ماهواره باشد، خروجی مغناطیس سنج، بردار میدان مغناطیسی زمین در دستگاه مختصات بدنه ماهواره خواهد بود:

$$m_b = C_o^b(q)m_o + b_m + v_m \quad (3)$$

بطوری که m_b مقدار میدان مغناطیسی در دستگاه مختصات بدنه ماهواره، b_m بایاس مغناطیس سنج ناشی از میدان‌های مغناطیسی داخل ماهواره^۲ و v_m نویز سفید اندازه‌گیری مغناطیس سنج می‌باشد. در این حالت ماتریس دوران قاب مداری به قاب بدنی ماهواره که به صورت تابعی از کوآرنیون وضعیت بیان شده است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_o^b(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

وضعیت یک ماهواره کوچک ارائه شده است که علاوه بر فراهم نمودن دقت مناسب، این حسگرها به عنوان مکمل و افزونه برای افزایش قابلیت اطمینان در مواجهه با خرابی یا افت کارایی نیز عمل می‌کنند. سپس الگوریتم‌های تعیین وضعیت مبتنی بر فیلتر کالمن توسعه یافته مورد بررسی قرار می‌گیرند. این فیلتر با کمک مدل سینماتیک دورانی و داده‌های جابرو وضعیت را پیش‌بینی نموده و با استفاده از حسگر خورشید و مغناطیس سنج آن را بروزرسانی و تدقیق می‌نماید. برای این منظور، ابتدا دینامیک غیرخطی ماهواره به عنوان مرجع، در نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی می‌شود. سپس با مدل‌سازی حسگرهای خورشید و مغناطیس سنج و تلفیق اطلاعات حاصل از آن‌ها با حسگر ژيروسکوپ عملکرد الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته به دو روش کوآرنیون و ماتریس کسینوس هادی بررسی می‌شود. سناریوهای مختلفی توسط نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی شده است که نشان می‌دهد الگوریتم ارائه شده قادر است وضعیت را به صورت دقیق تخمین زده و در مقابل اختلالات مربوط به کسوف و مزاحمت‌های مغناطیسی نیز مقاوم باشد.

۲ مدل حسگرها

در این بخش، مدل‌های ریاضی مورد استفاده برای حسگرهای تعیین وضعیت ماهواره ارائه می‌شود. دقت سیستم تعیین وضعیت به شدت به دقت این مدل‌ها و در نظر گرفتن منابع خطا مانند بایاس و نویز بستگی دارد. حسگرهای سیستم تعیین وضعیت به دو دسته اصلی طبقه‌بندی می‌شوند: حسگرهای مرجع و حسگرهای اینرسی. حسگرهای مرجع، جهت ماهواره را نسبت به اجرام سماوی اندازه‌گیری می‌کنند. در مقابل، حسگرهای اینرسی، نرخ تغییر وضعیت را نسبت به یک قاب مرجع اینرسی اندازه‌گیری می‌کنند و سیستم را قادر می‌سازند تا سرعت زاویه‌ای و دینامیک چرخشی را به طور دقیق ردیابی کند.

شبیه‌سازی انجام شده، شامل مدل‌های واقع‌گرایانه‌ای از حسگرهایی است که معمولاً در سیستم‌های تعیین وضعیت ماهواره‌های کوچک استفاده می‌شوند. حسگرهای انتخاب شده شامل حسگر خورشید، مغناطیس سنج و ژيروسکوپ می‌باشند.

به منظور فیلترینگ مناسب خروجی حسگرهای وضعیتی و نیز تلفیق مناسب اطلاعات آنها، مدل فرایند و مدل اندازه‌گیری باید براساس نیاز و با دقت مناسب فراهم شود. در همین راستا مدل اندازه‌گیری حسگرهای مورد استفاده در فیلترینگ در این بخش معرفی می‌شوند.

۲-۱ ژيروسکوپ

ژيروسکوپ سه‌محوره، سرعت زاویه‌ای بدنه ماهواره نسبت به قاب اینرسی را در دستگاه مختصات بدنی اندازه‌گیری می‌کند. با فرض نصب

² Remanent Magnetization

¹ Random Walk

۲-۳ حسگر خورشید

حسگر خورشید بردار واحد راستای خورشید را در فریم بدنی مشخص می‌کند. این حسگر تنها در زمانی که ماهواره در سایه زمین^۱ نباشد، داده معتبر تولید می‌کند. به عبارت دیگر، حسگر خورشید نوعی حسگر وضعیت نوری است که به منظور تعیین وضعیت فضاپیما نسبت به خورشید استفاده می‌شود. این امر با سنجش بردار خورشید در سیستم مختصات بدنه ماهواره محقق می‌شود. هنگامی که ماهواره در یک موقعیت خاص قرار دارد، بردار واحد خورشید در قاب مداری ماهواره S_0 است و بردار واحد خورشید بدست آمده از حسگر خورشید در قاب بدنی S_b است، بنابراین خواهیم داشت:

$$S_b = C_0^b(q)S_0 + b_s + v_s \quad (5)$$

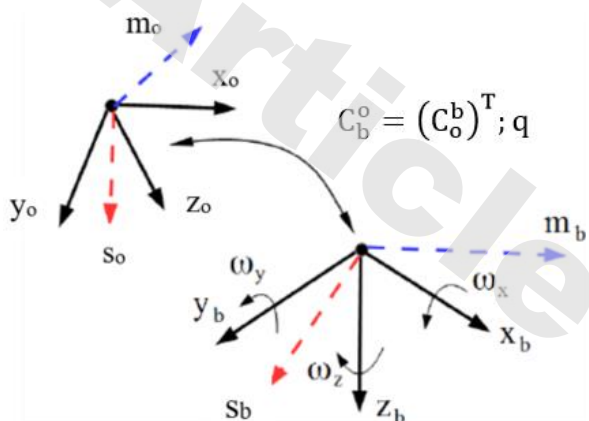
بطوری که b_s بایاس حسگر خورشید، v_s خطای اندازه‌گیری حسگر خورشید، C_0^b ماتریس تبدیل بین قاب مداری و قاب بدنی است. در زمان‌هایی که ماهواره در فاز سایه قرار می‌گیرد، بردار S_b در دسترس نیست. در این حالت، در الگوریتم‌های فیلترینگ مانند فیلتر کالمن توسعه یافته یا سیستم مرجع وضعیت و سمت^۲، بخش اصلاح^۳ مربوط به این حسگر غیرفعال شده و تخمین وضعیت تنها براساس انتشار^۴ ژيروسکوپ و یا داده‌های مغناطیس سنج (در صورت وجود) انجام می‌شود.

۳ مدل اندازه‌گیری وضعیت

با توجه به این که خروجی دو حسگر خورشید و مغناطیس سنج دو بردار متمایز از وضعیت ماهواره می‌باشد، می‌توان با استفاده از الگوریتم‌های کلاسیک و ساده TRIAD و QUEST وضعیت را تخمین زد. این دو الگوریتم وضعیت را با استفاده از اطلاعات دو نوع حسگر تعیین می‌کنند به نحوی که تصویر دو بردار غیر موازی را روی محورهای قاب بدنه اندازه‌گیری می‌کند. بدین منظور می‌توان با استفاده از بردار میدان مغناطیسی زمین و بردار خورشید تعیین وضعیت را انجام داد، اما ایراد این دو الگوریتم این است که در صورتی که یکی از این دو بردار قابل اندازه‌گیری نباشد قادر به تخمین وضعیت نخواهد بود. بطور مثال در شرایط کسوف که بردار خورشید در دسترس نیست این الگوریتم‌ها نمی‌توانند صرفاً با بردار میدان مغناطیسی عملکرد داشته باشند.

از سوی دیگر، مشکل تعیین وضعیت با استفاده از بردار میدان مغناطیسی و بردار خورشید این است که این دو بردار به راحتی می‌توانند دچار اختلال شوند که منجر به تخمین وضعیت اشتباه می‌شود. در نتیجه به منظور استفاده از اطلاعات ژيروسکوپ (انتگرال‌گیری از سرعت‌های زاویه‌ای) برای تعیین وضعیت از یک الگوریتم AHRS بهره می‌بریم که

بطور مداوم از اطلاعات حسگر خورشید و مغناطیس سنج برای تصحیح و بروزرسانی وضعیت استفاده می‌کند. به عبارت دیگر به منظور تعیین وضعیت دقیق ماهواره، از الگوریتم AHRS مبتنی بر فیلتر کالمن توسعه‌یافته استفاده شده است. این الگوریتم با ترکیب داده‌های نرخ زاویه‌ای (از ژيروسکوپ) و بردارهای مرجع (از حسگر خورشید و مغناطیس سنج)، برآوردی بهینه از وضعیت ماهواره و بایاس ژيروسکوپ ارائه می‌دهد. در این تحقیق به منظور تعیین وضعیت، دو نوع الگوریتم AHRS یکی بر مبنای ماتریس کسینوس‌های هادی و دیگری بر مبنای کوآترینیون پیاده‌سازی شده است. اساساً کاری که AHRS انجام می‌دهد این است که وضعیت دستگاه مجهز به حسگرها را نسبت به یک قاب از پیش تعریف شده تعیین می‌کند، بطوری که قاب اول را قاب بدنه و دومی را قاب مداری می‌نامیم. بنابراین می‌توان وضعیت بدنه را با استفاده از دو بردار غیر موازی با هم و متصل به آن تعریف کرد.



شکل ۱- بردارهای میدان مغناطیسی و خورشید در قاب‌های بدنی و مداری.

Fig. 1. Magnetic field and Sun vectors in body and orbital frames

۳-۱ ساختار الگوریتم AHRS

در این تحقیق، دو رویکرد متفاوت برای بازنمایی وضعیت و پیاده‌سازی فیلتر تخمین در نظر گرفته شده است:

- الگوریتم مبتنی بر ماتریس کسینوس‌های هادی که در آن وضعیت مستقیماً در فضای ماتریسی 3×3 تخمین زده می‌شود.
- الگوریتم مبتنی بر کوآترینیون که از پارامترهای چهارگانه برای اجتناب از تکینگی^۵ و کاهش حجم محاسبات استفاده می‌کند.

⁴ Propagation

⁵ Singularity

¹ Eclipse

² Attitude Heading Reference System

³ Correction

$$\dot{C}_b^i(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{C_b^i(t + \delta t) - C_b^i(t)}{\delta t} \right) \quad (8)$$

با فرض دوران قاب بدنه نسبت به قاب اینرسی، ماتریس انتقال در لحظه $t + \delta t$ را می‌توان به صورت ترکیبی از وضعیت قبلی و دوران لحظه‌ای بیان نمود:

$$C_b^i(t + \delta t) = C_b^i(t) C_{b(t+\delta t)}^{b(t)} \quad (9)$$

برای بازه‌های زمانی بسیار کوتاه (δt)، دوران قاب بدنه را می‌توان با بردار زوایای کوچک $\omega_{ib}^b \delta t \approx \delta \theta$ توصیف کرد. در نتیجه، ماتریس دوران لحظه‌ای با استفاده از تقریب خطی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$C_b^i(t + \delta t) = C_b^i(t) (I_{3 \times 3} + [\omega_{ib}^b \times] \delta t) \quad (10)$$

که در آن $[\omega_{ib}^b \times]$ ماتریس پادمتقارن حاصل از بردار نرخ زاویه‌ای است. با جای‌گذاری این رابطه در تعریف مشتق، معادله دیفرانسیل سینماتیکی وضعیت بدست می‌آید:

$$\dot{C}_b^i = C_b^i \Omega_{ib}^b \quad (11)$$

که یک معادله خطی دیفرانسیلی ماتریسی درجه اول حاصل می‌شود. همان گونه که در این معادله مشخص است ماتریس وضعیت با استفاده از نرخ زاویه‌ای اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ بروزرسانی می‌شود. با حل این معادله در بازه زمانی $[t, t + \delta t]$ و با فرض ثابت بودن نرخ زاویه‌ای در این بازه^۲، پاسخ سیستم به‌صورت نمایی بیان می‌گردد:

$$C_b^i(t + \delta t) = C_b^i(t) \exp(\alpha_{ib}^b \times) \quad (12)$$

که در آن $\alpha_{ib}^b(t) = \int_t^{t+\delta t} \omega_{ib}^b dt$ بردار دوران در بازه نمونه‌برداری است. با بسط سری توانی تابع نمایی و نگه داشتن جملات مرتبه اول، رابطه کاربردی بروزرسانی وضعیت برای پیاده‌سازی به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$C_b^i(t + \delta t) \approx C_b^i(t) (I_{3 \times 3} + \Omega_{ib}^b \delta t) \quad (13)$$

بطوری که ماتریس $I_{3 \times 3} + \Omega_{ib}^b \delta t$ برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\omega_{ib,z}^b \delta t & \omega_{ib,y}^b \delta t \\ \omega_{ib,z}^b \delta t & 1 & -\omega_{ib,x}^b \delta t \\ -\omega_{ib,y}^b \delta t & \omega_{ib,x}^b \delta t & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

که ω_{ib}^b نرخ زاویه‌ای اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ و δt گام زمانی نمونه‌برداری است.

۳-۳-۲ انتشار وضعیت بر مبنای کواترانیون

به دلیل مزایایی نظیر عدم وجود تکیه‌گی و محاسبات بهینه، از کواترانیون واحد $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ به منظور توصیف وضعیت ماهواره استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییرات زمانی کواترانیون نسبت به نرخ زاویه‌ای بدنه (ω_{ib}^b) به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

اساس عملکرد این الگوریتم‌ها بر دو گام اصلی استوار است:

- **گام پیش‌بینی:** انتگرال‌گیری از سرعت‌های زاویه‌ای اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ برای به‌روزرسانی وضعیت در طول زمان.
- **گام اصلاح:** استفاده از بردارهای غیرموازی خورشید و میدان مغناطیسی برای تصحیح خطای انباشته شده^۱ و تخمین بایاس ژيروسکوپ.

۳-۲ سینماتیک وضعیت

وضعیت ماهواره در واقع دوران قاب متصل به بدنه نسبت به قاب مرجع مداری است. نرخ تغییرات وضعیت بر اساس سرعت زاویه‌ای بدنه برای هر دو روش ماتریس کسینوسی هادی و کواترانیون به صورت زیر تعریف می‌شود:

- **روش ماتریس کسینوسی هادی:**

$$\dot{C}_b^o = -[\omega_{ob}^b \times] C_b^o \quad (6)$$

که در آن $[\omega_{ob}^b \times]$ ماتریس پادمتقارن سرعت زاویه‌ای است.

- **روش کواترانیون:**

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega(\omega_{ob}^b) q \quad (7)$$

که در آن Ω ماتریس نرخ کواترانیونی است.

در نهایت، الگوریتم AHRS با استفاده از این روابط سینماتیکی در ساختار فیلتر کالمن، وضعیت لحظه‌ای ماهواره را با دقت بالا تعیین می‌کند.

۳-۳-۳ انتشار وضعیت

فرآیند انتشار یا پیش‌بینی وضعیت، هسته اصلی ناوبری اینرسی را تشکیل می‌دهد که در آن وضعیت فعلی ماهواره با استفاده از خروجی ژيروسکوپ‌ها (نرخ زاویه‌ای) بروزرسانی می‌شود. در این پژوهش، از دو روش رایج یعنی ماتریس کسینوس هادی و کواترانیون برای توصیف دینامیک چرخشی استفاده شده است.

۳-۳-۱ انتشار بر مبنای ماتریس کسینوس هادی

در الگوریتم‌های ناوبری اینرسی، انتشار وضعیت با استفاده از نرخ زاویه‌ای اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ (ω_{ib}^b) انجام می‌شود. این فرآیند در قالب تغییرات زمانی ماتریس انتقال قاب بدنه به اینرسی (C_b^i) قالب بیان است. این بردار نرخ زاویه‌ای عبارتست از نرخ دوران قاب بدنه نسبت به قاب اینرسی در قاب بدنه. از سوی دیگر مشتق زمانی ماتریس انتقال با استفاده از تعریف حد را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

۴-۱ تعریف بردار حالت

بردار حالت خطای سیستم (δx) در هر دو روش به صورت یک بردار ۶ تایی تعریف می‌شود:

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta \theta \\ \delta b_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \theta_x & \delta \theta_y & \delta \theta_z & \delta b_{g_x} & \delta b_{g_y} & \delta b_{g_z} \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

که در آن $\delta \theta$ بردار خطای زاویه‌ای کوچک و δb_g بردار خطای بایاس ژيروسکوپ است.

۴-۲ الگوریتم فیلتر کالمن برمبنای کواترنیون

۴-۲-۱ مدل انتشار وضعیت

در این روش، ورودی خام ژيروسکوپ برای هر گام زمانی، بردار $\delta \theta_{raw}$ است که بیانگر انتگرال نرخ زاویه‌ای اندازه‌گیری شده در بازه زمانی δt می‌باشد. فرآیند انتشار وضعیت شامل دو مرحله اصلی است:

• جبران‌سازی بایاس

ابتدا اثر خطای بایاس تخمینی ($\hat{b}_g$) بر روی اندازه‌گیری ژيروسکوپ اصلاح می‌شود. با توجه به اینکه $\hat{b}_g$ نرخ بایاس است، انتگرال آن در بازه زمانی δt از ورودی کسر می‌گردد:

$$\delta \theta_b = \delta \theta_{raw} - \hat{b}_g \delta t \quad (22)$$

این بردار اصلاح شده ($\delta \theta_b$)، ورودی اصلی برای محاسبه دوران افزایشی^۲ است.

• بروزرسانی کواترنیون

کواترنیون دوران افزایشی (δq) مطابق با فرمول‌بندی زیر ساخته می‌شود:

$$\delta q = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \mathbf{n} \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

که در آن $\mathbf{n} = -\frac{\delta \theta_b}{\theta}$ محور دوران است. سپس وضعیت جدید از ضرب کواترنیونی حاصل می‌گردد:

$$q_{k+1} = \delta q \otimes q_k \quad (24)$$

در نهایت، عمل نرمال‌سازی جهت حفظ خاصیت واحد بودن کواترنیون انجام می‌شود:

$$q = q / \|q\| \quad (25)$$

۴-۲-۲ تصحیح کواترنیون وضعیت

از آنجا که فیلتر کالمن توسعه یافته یک بردار خطای کوچک زاویه‌ای را تخمین می‌زند و سپس این خطا به یک کواترنیون خطا تبدیل می‌شود تا کواترنیون وضعیت اصلاح شود.

• ساخت کواترنیون خطا

سه مولفه اول بردار حالت که همان خطای زاویه‌ای کوچک می‌باشند طبق رابطه (۲۱) به صورت زیر تعریف شد:

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{2} \Omega(\omega_{ib}^b) q(t) \quad (15)$$

که در آن $\Omega(\omega_{ib}^b)$ ماتریس نرخ کواترنیونی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

با فرض ثابت بودن بردار نرخ زاویه‌ای در بازه زمانی کوتاه δt (فرض Zero-Order Hold)، حل دقیق این معادله دیفرانسیل خطی به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$q(t + \delta t) = \exp\left(\frac{1}{2} \Omega(\omega_{ib}^b) \delta t\right) q(t) \quad (17)$$

با استفاده از بسط سری توانی برای تابع نمایی ماتریسی و با توجه به ویژگی‌های ماتریس پادمتقارن، فرم بسته این رابطه (فرمول بازگشتی بروزرسانی) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q(t + \delta t) = \left(\cos\left(\frac{\delta \theta}{2}\right) I_{4 \times 4} + \frac{1}{\delta \theta} \sin\left(\frac{\delta \theta}{2}\right) \Omega(\omega_{ib}^b) \delta t \right) q(t) \quad (18)$$

که در آن $\delta \theta = \omega_{ib}^b \delta t$ نشان دهنده مقدار زاویه دوران در بازه زمانی δt است. در کاربردهایی که نرخ نمونه‌برداری بالا باشد ($\delta \theta \ll 1$)، می‌توان از تقریب مرتبه اول زیر برای پیاده‌سازی سریع‌تر استفاده کرد:

$$q(t + \delta t) \approx \left(I_{4 \times 4} + \frac{1}{2} \Omega(\omega_{ib}^b) \delta t \right) q(t) \quad (19)$$

در نهایت، به دلیل وجود خطاهای عددی در فرآیند انتگرال‌گیری، کواترنیون حاصل ممکن است از حالت واحد خارج شود. لذا در هر گام محاسباتی، عملیات نرمال‌سازی به صورت زیر انجام می‌گیرد تا ویژگی دوران صلب حفظ شود:

$$q_{\text{normalized}} = \frac{q}{\|q\|} \quad (20)$$

۴ فیلتر کالمن توسعه‌یافته

فیلتر کالمن نوعی مشاهده‌گر حالت است که دارای دو ساختار پیش‌بین و تصحیح‌کننده است. این فیلتر مقادیر اندازه‌گیری شده و پیش‌بینی شده را برای یافتن تخمین بهینه وضعیت ترکیب می‌کند. همچنین اطلاعات عدم قطعیت را با محاسبه مستقیم کوواریانس ارائه می‌دهد. در این بخش، الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای تخمین بلادرنگ وضعیت ماهواره و جبران خطاهای حسگر (بایاس ژيروسکوپ) ارائه می‌شود. با توجه به ضرورت دقت در محاسبات فضایی، دو رویکرد محاسباتی برمبنای پارامترهای کواترنیون و ماتریس کسینوس هادی ارائه می‌گردد. هر دو روش از ساختار فیلتر حالت خطا^۱ بهره می‌برند که پایداری عددی بالاتری در تخمین زوایای وضعیت فراهم می‌کند.

۴-۳-۲ بازمتعامدسازی^۱

برخلاف کواترنیون، ماتریس کسینوس هادی به دلیل خطاهای عددی و تجمع خطا در مراحل انتشار، ماتریس وضعیت ممکن است خاصیت متعامد بودن ($CC^T = I$) خود را از دست بدهد. برای بازیابی این خاصیت، ابتدا ماتریس E را به صورت زیر تولید می‌کنیم:

$$E = I_{3 \times 3} + [\delta\theta \times] \quad (32)$$

بطوری که $[\delta\theta \times]$ ماتریس پادمتقارن سه مولفه اول بردار حالت می-باشد. سپس ماتریس کسینوس هادی به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$C_b^{o+} = EC_b^o \quad (33)$$

در ادامه، برای سطرهاى اول و دوم ماتریس، ابتدا ضرب داخلی را محاسبه کرده و این دو سطر به صورت زیر اصلاح می‌شوند:

$$\delta_{12} = c_1 \cdot c_2 \quad (34)$$

$$c_1 = c_1 - \frac{1}{2} \delta_{12} c_2 \quad (35)$$

$$c_2 = c_2 - \frac{1}{2} \delta_{12} c_1 \quad (36)$$

سپس سطر سوم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$c_3 = c_1 \times c_2 \quad (37)$$

در پایان هر سه سطر با تقسیم بر نرم خود نرمال‌سازی می‌شوند تا شرط متعامد و یکه بودن ماتریس حفظ شود.

۴-۴ مدل‌سازی دینامیک سیستم

در هر دو فیلتر، ماتریس انتقال وضعیت سیستم (F_k) با استفاده از بسط مرتبه دوم ماتریس ژاکوبین (A) استخراج می‌شود:

$$F_k = I + A\delta t + \frac{1}{2} A^2 \delta t^2, \quad A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & C(q) \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (38)$$

در اینجا $C(q)$ ماتریس دوران معادل کواترنیون است که وابستگی خطای بایاس به وضعیت را مدل می‌کند.

۴-۵ مدل نویز فرآیندی

در هر دو فیلتر، کوواریانس نویز فرآیند (Q_k) با در نظر گرفتن چگالی طیفی نویز ژيروسکوپ و بایاس، به روش انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای گسسته‌سازی می‌شود. بنابراین ماتریس شدت نویز فرآیند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_k = \text{diag}(\sigma_g, \sigma_{bg}) \quad (39)$$

بطوریکه Q_k یک ماتریسی ۶ تایی شامل نویز خطای ژيروسکوپ و نویز بایاس ژيروسکوپ می‌باشد.

ماتریس نگاشت نویز G یک ماتریس همانی 6×6 است، یعنی نویز فرآیندی مستقیماً و بدون تبدیل اضافی وارد هر دو بخش بردار حالت خطا (خطای وضعیت و خطای بایاس ژيروسکوپ) می‌شود.

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\theta_x \\ \delta\theta_y \\ \delta\theta_z \end{bmatrix} \quad (26)$$

برای زوایای کوچک، کواترنیون خطا به صورت تقریب مرتبه اول نوشته می‌شود:

$$q_e \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta\theta_x \\ \frac{1}{2} \delta\theta_y \\ \frac{1}{2} \delta\theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{e0} \\ q_{ev} \end{bmatrix} \quad (27)$$

در نتیجه این عبارت در واقع نگاشت خطای برداری کوچک فیلتر کالمن توسعه یافته به کواترنیون خطا است.

• نرمال‌سازی کواترنیون خطا

از آنجا که کواترنیون باید واحد باشد ($\|q_e\| = 1$)، پس آن را نرمالایز می‌کنیم. این کار تضمین می‌کند که خطای اعمال شده خودش یک دوران معتبر باشد.

• اعمال تصحیح بر کواترنیون وضعیت

در این مرحله، کواترنیون وضعیت قبلی با کواترنیون خطا ترکیب می‌شود:

$$q^+ = q^- \otimes q_e \quad (28)$$

بطور خلاصه می‌توان گفت فیلتر کالمن توسعه یافته یک خطای کوچک سه‌محوره $\delta\theta$ را تخمین می‌زند و سپس این خطا به یک دوران کوچک سه‌بعدی تبدیل می‌شود. در نهایت آن دوران کوچک روی کواترنیون قبلی اعمال می‌شود تا وضعیت اصلاح شود.

۴-۳ فیلتر کالمن بر مبنای ماتریس کسینوس هادی

۴-۳-۱ انتشار وضعیت به روش ماتریس افزایشی

در این رویکرد، ماتریس وضعیت (C_b^o) مستقیماً با استفاده از ماتریس دوران افزایشی ($C_{b(t+\delta t)}^{b(t)}$) بروزرسانی می‌شود. این ماتریس با استفاده از فرمول چرخش رودریگز و بسط تیلور ضرایب سینوسی و کسینوسی پیاده‌سازی شده است:

$$C_{b(t+\delta t)}^{b(t)} = I + S_1 [\delta\theta_b \times] + S_2 [\delta\theta_b \times]^2 \quad (29)$$

ضرایب S_1 و S_2 به ترتیب به صورت زیر تقریب زده شده‌اند تا از خطای تکنیکی در زوایای کوچک جلوگیری شود:

$$S_1 = \frac{\sin\theta}{\theta} \approx 1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{120} \quad (30)$$

$$S_2 = \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \approx \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{24} + \frac{\theta^4}{720} \quad (31)$$

سپس وضعیت جدید به کمک رابطه (۹) حاصل می‌شود.

گام زمانی ۰/۰۱ ثانیه جمع‌آوری شده‌اند. همچنین ممان‌های اینرسی ماهواره بصورت $J_x = J_y = J_z = 2 \times 10^{-3} \text{m}^4$ در نظر گرفته شده‌اند.

با توجه به داده‌های عناصر مداری دو خطی^۱، مدار ماهواره چمران ۱ بصورت یک مدار دایره‌ای با پریود ۹۰/۵۶۰۴ دقیقه و سرعت زاویه‌ای ۰/۰۰۱۱ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شده است. همچنین زاویه میل مداری برابر با ۶۴/۰۷۶۵ درجه و آرگومان حضیض ۳۱۰/۷۶ درجه می‌باشد. آغاز شبیه سازی مربوط به تاریخ ژولایوسی در تاریخ ۱۰/۱۰/۲۰۲۵ و زمان ۰۹:۰۰:۰۰ انجام شده است. طبق نتایج شبیه-سازی ماهواره در زمان ۰۹:۲۰:۴۹ وارد کسوف و در ساعت ۰۹:۴۸:۴۳ از آن خارج می‌شود، یعنی ماهواره حدوداً یک سوم پریود مداری خود را در کسوف سپری می‌کند. با توجه به این که فیلتر کالمن مورد استفاده براساس دینامیک وضعیت و اندازه‌گیری ژيروسکوپ، بردار فضای حالت را پیش‌بینی می‌کند، یک ژيروسکوپ مناسب با مقدار ناپایداری بایاس ۲ درجه بر ساعت، انحراف معیار $1e^{-5}$ و بایاس گام تصادفی $1e^{-10}$ انتخاب شده است. حسگر خورشید به عنوان حسگر تعیین کننده برای رسیدن به دقت مطلوب باید دارای دقت مناسب و مورد نیاز باشد. انحراف معیار مغناطیس سنج و حسگر خورشید به ترتیب برابر با $\sigma_m = ۰/۰۰۱۶$ و $\sigma_s = ۰/۰۰۳۴۹$ فرض شده‌اند. همچنین نرخ بروزرسانی مغناطیس-سنج و حسگر خورشید به ترتیب برابر با ۰/۵ و ۰/۲ هرتز در نظر گرفته شده است.

در ادامه داده‌های حسگرهای مغناطیس سنج و خورشید در قالب مداری و بدنی نشان داده می‌شود. در شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب نمودار مولفه‌های بردار واحد میدان مغناطیسی در قالب مداری و بدنی نسبت به زمان ارائه شده است. طبق تعریف قالب مداری، محور z به سمت مرکز زمین، محور y عمود بر صفحه مداری و محور x در صفحه مداری و عمود بر محورهای z و y است. جهت آن به سمت جلو و هم‌راستا با جهت حرکت ماهواره (بردار سرعت) می‌باشد تا یک سیستم راست‌گرد را تشکیل دهد. رفتار نمودارهای شکل ۲ شامل نوسانات آرام با دوره تناوب طولانی است. این امر کاملاً منطقی است زیرا نشان‌دهنده تغییرات تدریجی میدان مغناطیسی زمین در طول حرکت انتقالی ماهواره در یک مدار کامل است. از سوی دیگر در مورد نمودارهای شکل ۳ می‌توان گفت در راستای محورهای y و z نوسانات بسیار مترکمی قابل مشاهده است. از آنجا که چرخش حول محور x بدنه انجام می‌شود، مولفه H_x^b تحت تاثیر نوسانات سریع قرار نگرفته و رفتار آرام خود (مشابه H_x^o) را حفظ می‌کند. اما در مورد دو محور دیگر به دلیل چرخش مداوم بدنه، در حال جاروب کردن میدان مغناطیسی هستند و سیگنال کند مداری را با فرکانس بالای دوران مدوله می‌کنند. بنابراین می‌توان نتیجه

در نهایت، گسسته‌سازی کوواریانس نويز فرآیندی Q با تقریب انتگرال گیری دوزنقه‌ای ساخته می‌شود:

$$Q = \frac{1}{2} (F_k G Q_k G^T + G Q_k G^T F_k^T) \delta t \quad (40)$$

این رابطه نشان می‌دهد که واریانس نويز فرآیندی در طول بازه زمانی δt به صورت میانگین بین اثر نويز در ابتدا و انتهای گام زمانی محاسبه می‌شود. به عبارت دیگر، Q بیانگر کوواریانس نويز فرآیندی گسسته‌شده برای مدل فیلتر کالمن توسعه یافته است و مستقیماً در مرحله پیش‌بینی کوواریانس حالت استفاده می‌شود:

$$P_k = F_k P_{k-1} F_k^T + Q \quad (41)$$

۴-۶ مدل اندازه‌گیری و تصحیح

در هر دو فیلتر، از بردارهای مشاهده شده توسط حسگرهای خورشید (s_b) و مغناطیس سنج (m_b) استفاده می‌شود.

۴-۶-۱ بردار نوآوری و ماتریس مشاهده

بردار نوآوری (v_k) تفاوت بین مشاهده واقعی و تخمین است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v_k = \begin{bmatrix} s_o - \hat{s}_o \\ m_o - \hat{m}_o \end{bmatrix} \quad (42)$$

ماتریس مشاهده (H_k) نیز براساس ماتریس‌های پادمتقارن بردارهای پیش‌بینی شده تشکیل می‌شود:

$$H_k = \begin{bmatrix} [\hat{s}_o \times] & 0_{3 \times 3} \\ [\hat{m}_o \times] & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (43)$$

۴-۶-۲ اصلاح حالت خطا

پس از محاسبه بهره فیلتر کالمن (K_k)، بردار خطای حالت استخراج می‌شود:

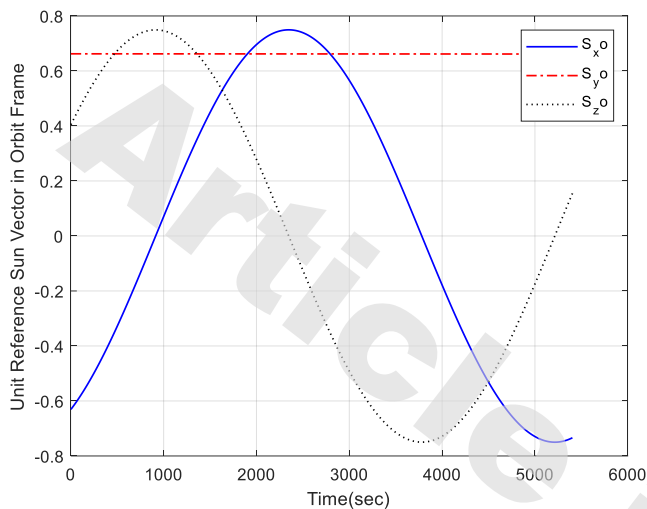
$$\delta x = K_k v_k \quad (44)$$

در نهایت، در روش کواترنیونی، یک کواترنیون خطای کوچک (δq_e) ساخته شده و وضعیت را اصلاح می‌کند. در روش ماتریس کسینوس هادی نیز، ماتریس اصلاحی (رابطه (۳۲)) در ماتریس وضعیت ضرب می‌گردد که شرح آن در بخش‌های قبل داده شده است.

۵ نتایج شبیه‌سازی

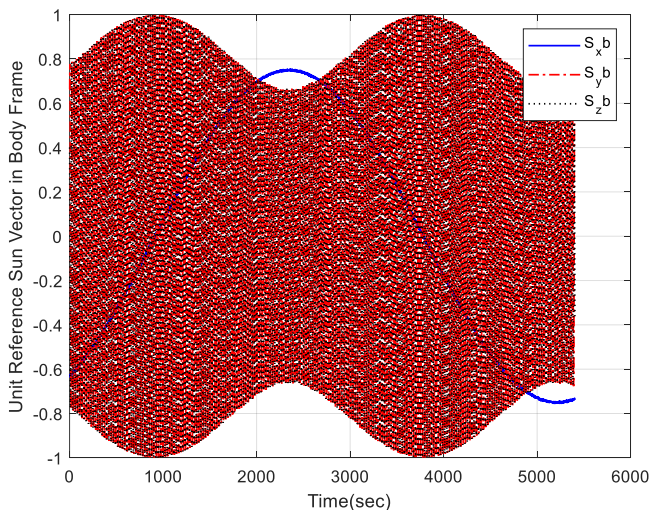
در این پژوهش شبیه‌سازی وضعیت ماهواره چمران ۱ در مدار دایره‌ای با ارتفاع ۵۴۵ کیلومتر در نرم‌افزار متلب انجام شده است. شبیه‌سازی با مقادیر اولیه $q_0 = \{1/0 \quad 0/0 \quad 0/0 \quad 0/0\}$ و $\omega_0 = \{15/0 \quad 0/0 \quad 0/0\} \text{deg/sec}$ به ترتیب برای وضعیت و نرخ زاویه‌ای ماهواره آغاز شده و داده‌ها در طول یک پریود زمانی ماهواره با

سینوسی آرام با دوره تناوب برابر با دوره مداری هستند که ناشی از چرخش ماهواره به دور زمین و تغییر زاویه دید آن نسبت به خورشید در صفحه مداری است. در مورد مولفه S_x^b در شکل ۵ می‌توان گفت چون ماهواره دقیقاً حول محور X خود در حال چرخش است، این محور تحت تأثیر دوران سریع قرار نمی‌گیرد. به همین دلیل، نمودار S_x^b دقیقاً مشابه همان نمودار S_x^o در قاب مداری است. دو مؤلفه S_y^b و S_z^b با سرعت در حال چرخش می‌باشند. بنابراین، حسگرها، مولفه‌های بردار خورشید را به صورت یک سیگنال با فرکانس بالا می‌خوانند.



شکل ۴- بردار واحد خورشید در قاب مداری.

Fig. 4. Unit Sun vector in orbit frame.

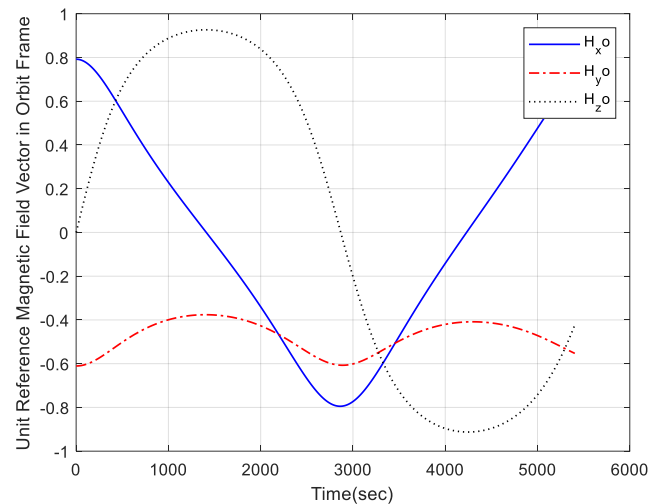


شکل ۵- بردار واحد خورشید در قاب بدنی.

Fig. 5. Unit Sun vector in body frame.

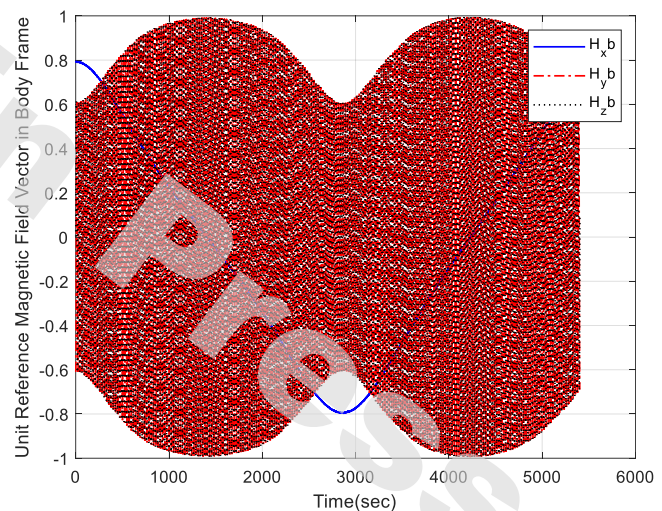
شکل ۶ وضعیت ماهواره را نسبت به مرجع اندازه‌گیری واقعی (دستگاه مختصات خط‌چین) در پایان شبیه‌سازی نشان می‌دهد. همانطور

گرفت نمودارها کاملاً منطقی، از نظر سینماتیکی درست و با یکدیگر سازگار هستند. همچنین شبیه‌سازی انجام‌شده، تبدیل دستگاه‌های مختصات و اثرات دینامیک دورانی ماهواره بر خروجی سنسور مغناطیس‌سنج را با دقت بسیار بالایی نشان می‌دهد.



شکل ۲- بردار واحد میدان مغناطیسی در قاب مداری.

Fig. 2. Unit magnetic field vector in orbit frame.



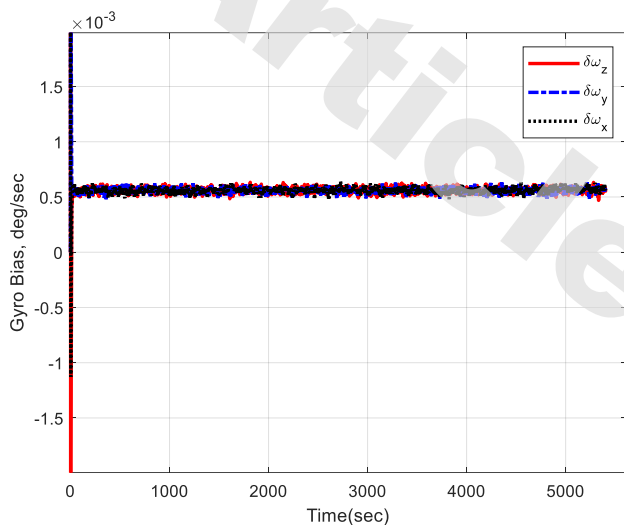
شکل ۳- بردار واحد میدان مغناطیسی در قاب بدنی.

Fig. 3. Unit magnetic field vector in body frame.

شکل‌های ۴ و ۵ به ترتیب نمودار مولفه‌های بردار واحد خورشید در قاب مداری و بدنی نسبت به زمان را نشان می‌دهند. مولفه S_y^o در شکل ۴ در طول یک مدار (حدود ۵۴۰۰ ثانیه) تقریباً ثابت و برابر با ۰/۶۶ است. از نظر فیزیکی، محور Y مداری عمود بر صفحه مدار است. از آنجا که فاصله خورشید بسیار زیاد است، زاویه بین بردار خورشید و صفحه مدار در طول یک چرخش مداری تغییر نمی‌کند، بنابراین ثابت ماندن این مؤلفه کاملاً درست است. دو مؤلفه S_x^o و S_z^o دارای نوسانات

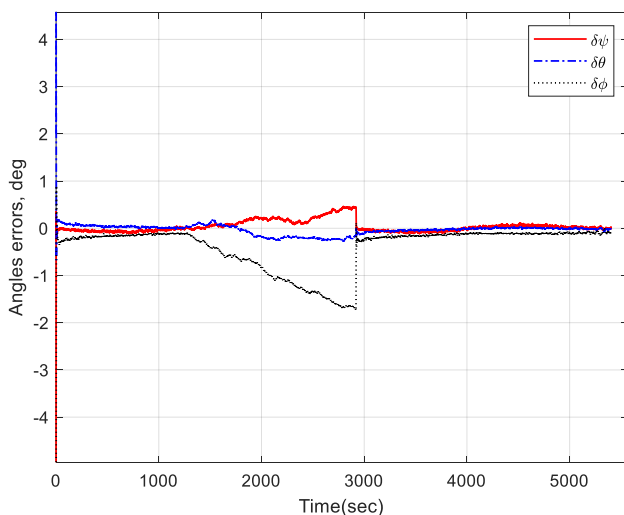
مغناطیس سنج و ژيروسکوپ انجام می شود. همان گونه که در این شکل مشخص است، حداکثر خطای تخمین وضعیت حدود ۰/۲۵ درجه می باشد که با توجه به ماموریت ماهواره و حسگرهای مورد استفاده مطلوب است.

در این دو شکل محور دوران ماهواره چمران ۱ با خطچین مشکی رنگ نشان داده شده است. همانطور که قبلا بیان شد این ماهواره با سرعت زاویه ای ۱۵ درجه بر ثانیه حول محور X دوران می کند و دوران حول محوره های دیگر صفر می باشد.



شکل ۸- تخمین بایاس ژيروسکوپ در حالت کسوف با ژيروسکوپ و مغناطیس سنج.

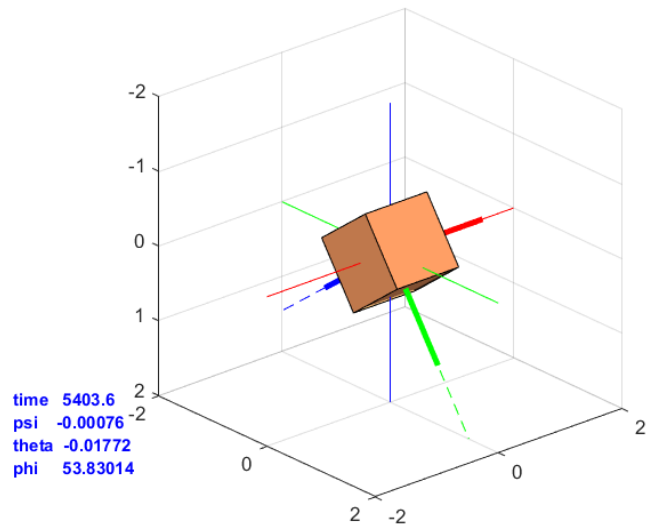
Fig. 8. Estimating gyroscope biases in eclipse mode with gyroscope and magnetometer only.



شکل ۹- خطای تخمین زوایای اوپلر در حالت کسوف با ژيروسکوپ.

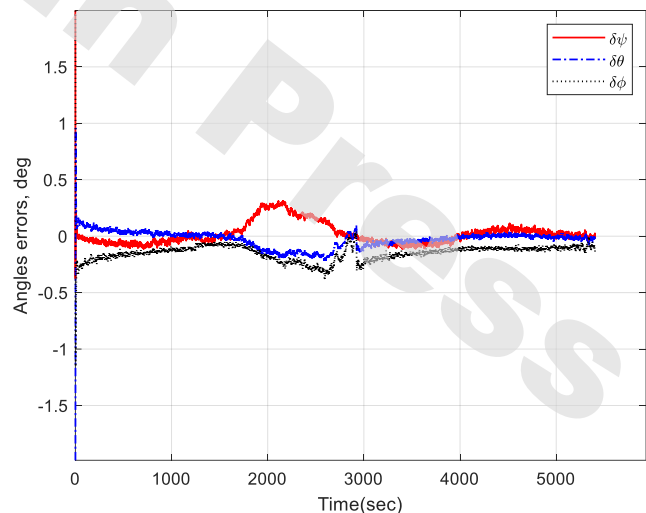
Fig. 9. Error in estimating Euler angles in eclipse mode with gyroscope only.

که مشخص است تخمین وضعیت ماهواره با دقت بالا انجام شده است و وضعیت تخمینی بر روی وضعیت واقعی منطبق می باشد.



شکل ۶- وضعیت سه بعدی ماهواره نسبت به مرجع در پایان شبیه سازی.

Fig. 6. The 3D attitude of the satellite relative to the reference at the end of the simulation.

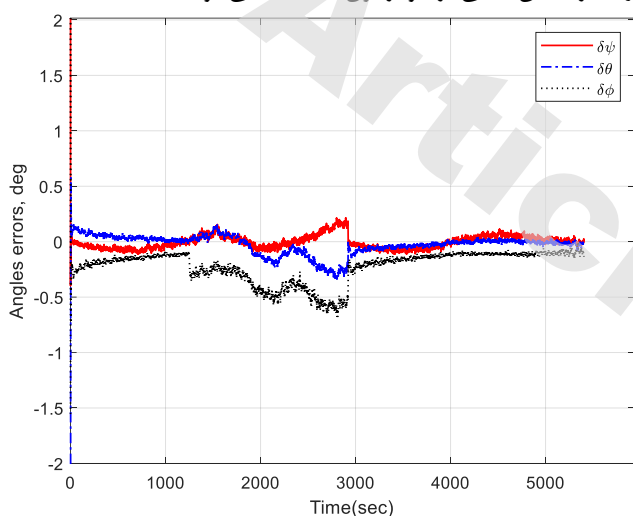


شکل ۷- خطای تخمین زوایای اوپلر در حالت کسوف با ژيروسکوپ و مغناطیس سنج.

Fig. 7. Error in estimating Euler angles in eclipse mode with gyroscope and magnetometer only.

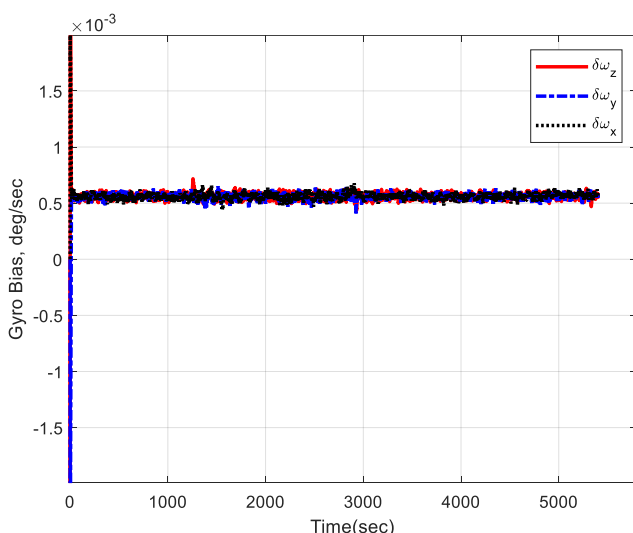
شکل های ۷ و ۸ به ترتیب خطای تخمین زوایای اوپلر و تخمین بایاس ژيروسکوپ ها در شرایطی که ماهواره در حالت کسوف از مغناطیس سنج و ژيروسکوپ برای تخمین وضعیت استفاده می کند را نشان می دهد. همانطور که در شکل ۷ نشان داده شده است از ثانیه ۱۳۴۹ تا ۲۹۲۲ ماهواره وارد کسوف شده است. در این حالت به دلیل از کار افتادن حسگر خورشید تخمین وضعیت به کمک دو حسگر

فیلتر کالمن استفاده می‌شود. در این نمودارها برای مقایسه و بررسی دقیق‌تر، چند ثانیه ابتدایی شبیه‌سازی، بزرگ‌نمایی شده است. با توجه به نمودارها، عملکرد هر دو فیلتر نزدیک به هم بوده اما تنها تفاوت اصلی آن‌ها در لحظات اولیه شبیه‌سازی است، بطوری که تخمین انجام شده توسط فیلتر کالمن مبتنی بر کوآترینیون، دارای پایداری بهتر و همگرایی سریع‌تر است. همچنین با توجه به شکل ۱۴ می‌توان گفت در لحظات اولیه فیلتر کالمن مبتنی بر ماتریس کسینوس هادی در تخمین بایاس ژيروسکوپ دچار فرارجهش^۱ شده است، در حالی که چنین چیزی در فیلتر کالمن مبتنی بر کوآترینیون مشاهده نمی‌شود.



شکل ۱۱- خطای تخمین زوایای اوپلر با ژيروسکوپ و حسگر خورشید.

Fig. 11. Error in estimating Euler angles with gyroscope and Sun sensor only.

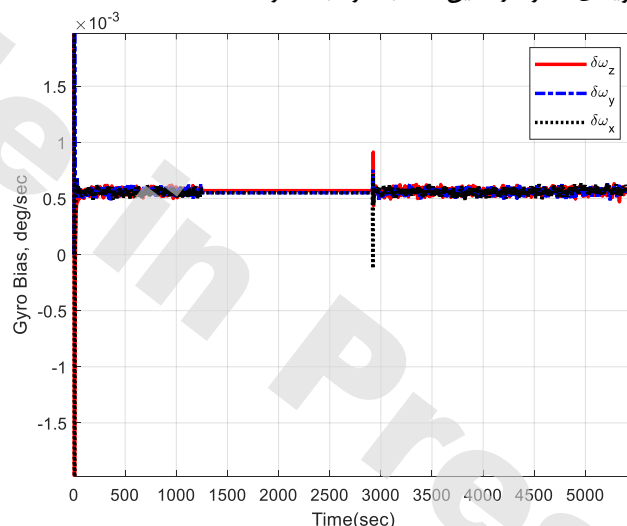


شکل ۱۲- تخمین بایاس ژيروسکوپ با ژيروسکوپ و حسگر خورشید.

Fig. 12. Estimating gyroscope biases with gyroscope and Sun sensor only.

شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب خطای تخمین زوایای اوپلر و تخمین بایاس ژيروسکوپ‌ها در شرایطی که ماهواره در حالت کسوف تنها از ژيروسکوپ برای تخمین وضعیت استفاده می‌کند را نشان می‌دهد.

در شکل ۹ فرض می‌شود با ورود ماهواره به کسوف مغناطیس‌سنج نیز دچار نقص یا اختلال شده و از کار می‌افتد. همانطور که مشاهده می‌شود در این شرایط با گذشت زمان خطای تخمین وضعیت افزایش یافته و باید توسط یک مرجع مناسب اصلاح شود. همان گونه که در شکل مشخص است، خطای تخمین وضعیت پس از ۱۶۷۳ ثانیه، در حدود ۱/۵ درجه می‌باشد که با توجه به مأموریت ماهواره و حسگرهای مورد استفاده مطلوب است. شایان ذکر است که این مقدار خطا برای محوری (x) است که ماهواره با سرعت زاویه‌ای ۱۵ درجه بر ثانیه حول آن می‌چرخد. این درحالی است که برای دو محور دیگر که سرعت زاویه‌ای صفر دارند این خطا به مراتب کمتر است.



شکل ۱۰- تخمین بایاس ژيروسکوپ در حالت کسوف با ژيروسکوپ.

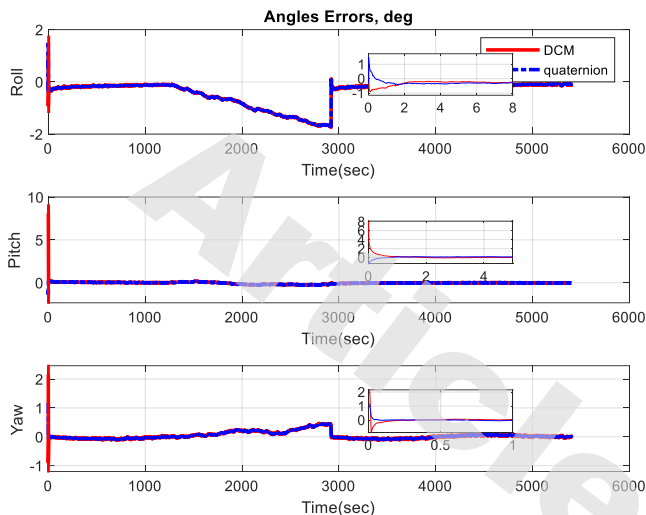
Fig. 10. Estimating gyroscope biases in eclipse mode with gyroscope only.

شکل‌های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب خطای تخمین زوایای اوپلر و تخمین بایاس ژيروسکوپ‌ها در شرایطی که ماهواره از ثانیه ۲۵۰۰ تا ۴۵۰۰ مغناطیس‌سنج را از دست می‌دهد و تخمین وضعیت به کمک حسگر خورشید و ژيروسکوپ انجام می‌شود را نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل مشخص است، خطای تخمین وضعیت در این حالت در حدود ۰/۵ درجه می‌باشد که با توجه به مأموریت ماهواره قابل قبول است.

در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ مقایسه عملکرد فیلتر کالمن توسعه‌یافته مبتنی بر ماتریس کسینوس هادی و کوآترینیون در زمان کسوف ارائه شده است. در این حالت حسگر خورشید قادر به اندازه‌گیری بردار خورشید نیست و از ژيروسکوپ و مغناطیس‌سنج به منظور تخمین وضعیت ماهواره در

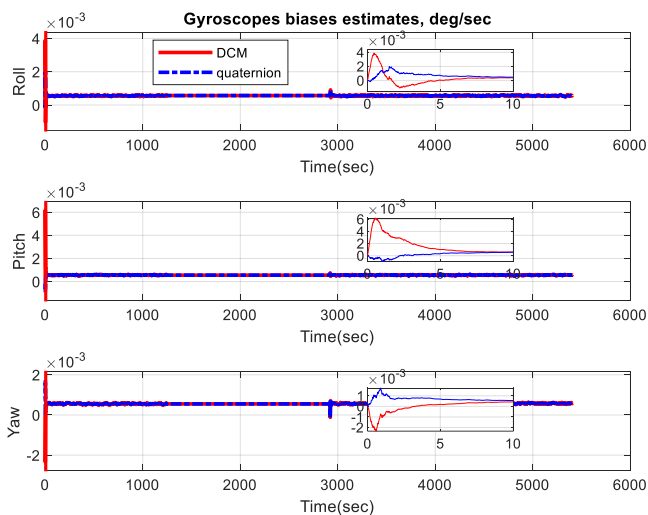
^۱ Overshoot

بطوری که تخمین انجام شده توسط فیلتر کالمن مبتنی بر کواترنیون، دارای پایداری بهتر و همگرایی سریع تر است. همچنین با توجه به شکل ۱۶ می توان گفت در لحظات اولیه فیلتر کالمن مبتنی بر ماتریس کسینوس هادی در تخمین بایاس ژيروسکوپ دچار فراجشش شده است، در حالی که چنین چیزی در فیلتر کالمن مبتنی بر کواترنیون مشاهده نمی شود.



شکل ۱۵ - مقایسه خطای تخمین زوایای اولیه در حالت کسوف با ژيروسکوپ.

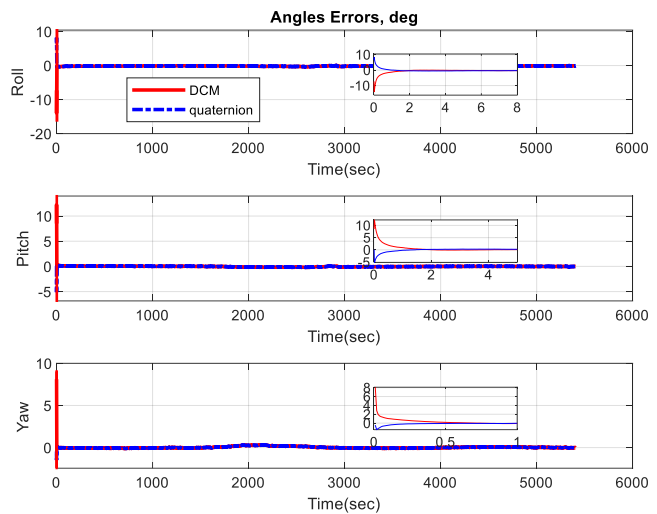
Fig. 15. Comparison of the error in estimating Euler angles in eclipse mode with gyroscope only.



شکل ۱۶ - مقایسه تخمین بایاس ژيروسکوپ در حالت کسوف با ژيروسکوپ.

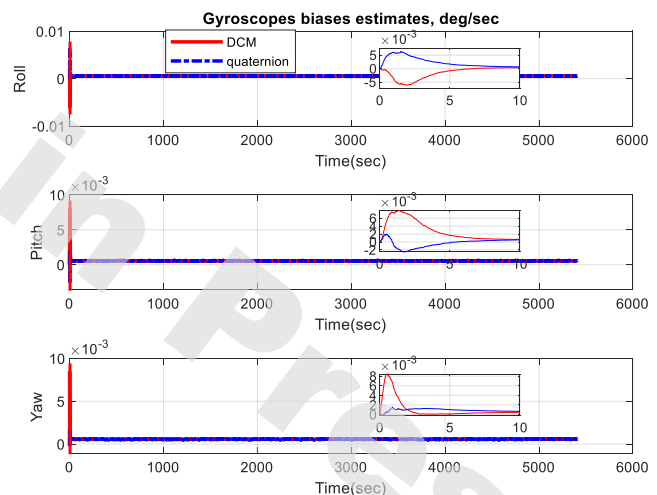
Fig. 16. Comparison of gyroscope biases estimation in eclipse mode with gyroscope only.

در شکل های ۱۷ و ۱۸ مقایسه عملکرد فیلتر کالمن بر مبنای ماتریس کسینوس هادی و کواترنیون ارائه شده است. در این حالت حسگر مغناطیس سنج قادر به اندازه گیری بردار میدان مغناطیسی زمین نیست و از ژيروسکوپ و حسگر خورشید برای تخمین وضعیت ماهواره



شکل ۱۳ - مقایسه خطای تخمین زوایای اولیه در حالت کسوف با ژيروسکوپ و مغناطیس سنج.

Fig. 13. Comparison of the error in estimating Euler angles in eclipse mode with gyroscope and magnetometer only.



شکل ۱۴ - مقایسه تخمین بایاس ژيروسکوپ در حالت کسوف با ژيروسکوپ و مغناطیس سنج.

Fig. 14. Comparison of gyroscope biases estimation in eclipse mode with gyroscope and magnetometer only.

در شکل های ۱۵ و ۱۶ مقایسه عملکرد فیلتر کالمن بر مبنای ماتریس کسینوس هادی و کواترنیون در زمان کسوف ارائه شده است. در این حالت حسگر خورشید و حسگر مغناطیس سنج به ترتیب قادر به اندازه گیری بردار خورشید و بردار میدان مغناطیسی زمین نیستند و تنها از ژيروسکوپ برای تخمین وضعیت ماهواره در فیلتر کالمن استفاده می شود. در این نمودارها برای مقایسه و بررسی دقیق تر، چند ثانیه ابتدایی شبیه سازی، بزرگ نمایی شده است.

همانطور که در نمودارها مشاهده می شود، عملکرد هر دو فیلتر نزدیک به هم بوده اما تنها تفاوت اصلی آن ها در لحظات اولیه شبیه سازی است،

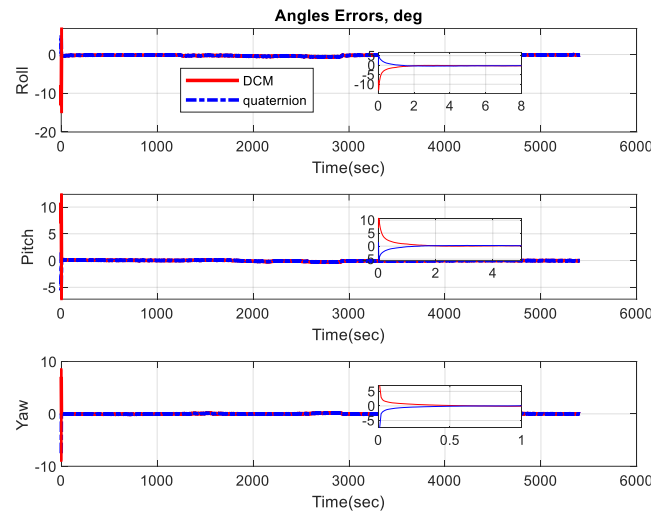
دینامیک وضعیت و اندازه‌گیری ژيروسکوپ، بردار فضای حالت را پیش-بینی و سپس براساس اندازه‌گیری حسگر خورشید و مغناطیس‌سنج، مقدار پیش‌بینی را بروز رسانی می‌کند. حسگر خورشید برای رسیدن به دقت مطلوب تعیین کننده است ولی در عین حال دقت ژيروسکوپ نیز برای غلبه بر اختلالات که منجر به کاهش کارایی حسگرهای خورشید و مغناطیس‌سنج و نیز پوشش پهنای باند پایین این حسگرها بسیار مهم است. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که ترکیب حسگرهای پیشنهادی می‌تواند الزامات کارایی سامانه تعیین وضعیت برای یک ماهواره در مدار پایین را پوشش دهد منوط به اینکه حسگرها بر اساس نیاز از دقت و کارایی لازم برخوردار باشند. بطور مثال در زمان از دست رفتن دو حسگر خورشید و مغناطیس‌سنج، ژيروسکوپ با مشخصات بیان شده در بخش ۶ می‌تواند وضعیت را با دقتی در حدود $3/5$ درجه بر ساعت تخمین بزند. چون پهنای باند حسگر خورشید پایین است، به خصوص در ماهواره چرخان که تغییرات وضعیتی زیاد است، تاخیر ناشی از پهنای باند پایین این حسگر منجر به افزایش خطا در محور چرخش می‌شود. برای کاهش خطا باید تاخیر موجود در اندازه‌گیری حسگر خورشید جبران‌سازی شود که برای کارهای آتی این پژوهش در نظر گرفته شده است.

از سوی دیگر، در این مقاله، تخمین وضعیت ماهواره با دو نمایش متفاوت برای وضعیت دورانی یعنی نمایش ماتریس کسینوس‌های هادی و نمایش کواترنیونی پیاده‌سازی شده است. هر دو روش از ساختار کلی فیلتر کالمن توسعه یافته استفاده می‌کنند و شامل مراحل انتشار وضعیت، انتشار کوواریانس، مدل اندازه‌گیری و تصحیح حالت هستند. با این حال، تفاوت در نوع نمایش وضعیت باعث ایجاد تفاوت‌هایی در پایداری عددی، هزینه محاسباتی و نحوه حفظ قیود هندسی دوران می‌شود. در ادامه نتایج حاصل از شبیه‌سازی این دو رویکرد با هم مقایسه می‌شوند.

۶-۱ پایداری عددی

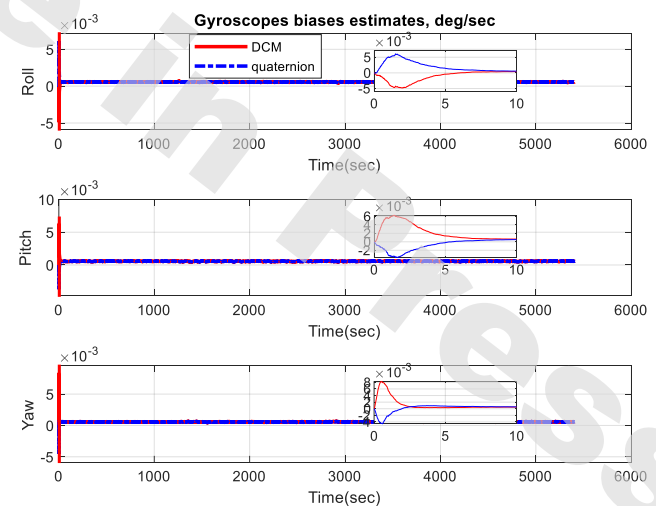
در روش کواترنیون، وضعیت دورانی با بردار چهارم‌ولفه‌ای نمایش داده می‌شود. قید اصلی در این نمایش، واحد بودن کواترنیون است. در فیلتر کالمن مبتنی بر کواترنیون، پس از فاز انتشار و همچنین پس از اعمال تصحیح، کواترنیون نرمال‌سازی می‌شود. این نرمال‌سازی باعث می‌شود خطاهای کوچک ناشی از گرد کردن عددی و انتگرال‌گیری در طول زمان باعث خروج کواترنیون از فضای دوران معتبر، نشوند. از نظر عددی، نمایش کواترنیونی مزیت مهمی دارد؛ زیرا فقط یک قید اسکالر دارد و حفظ آن با نرمال‌سازی ساده انجام می‌شود. بنابراین اگر در اثر محاسبات عددی مقدار $\|q\|$ از یک فاصله بگیرد، به کمک رابطه (۲۰) دوباره به فضای کواترنیون‌های واحد بازگردانده می‌شود. در مرحله تصحیح نیز بردار خطای وضعیت تخمین زده شده توسط فیلتر کالمن توسعه یافته به کواترنیون خطا تبدیل و در نهایت بر کواترنیون وضعیت

در فیلتر کالمن استفاده می‌شود. با توجه به این دو نمودار عملکرد هر دو فیلتر نزدیک به هم بوده اما تنها تفاوت اصلی آن‌ها در لحظات اولیه شبیه‌سازی است، بطوری که تخمین انجام شده توسط فیلتر کالمن مبتنی بر کواترنیون، دارای پایداری بهتر و همگرایی سریع‌تر است.



شکل ۱۷- مقایسه خطای تخمین زوایای اوایل در نبود مغناطیس‌سنج.

Fig. 17. Comparison of the error in estimating Euler angles in the absence of magnetometer.



شکل ۱۸- مقایسه تخمین بایاس ژيروسکوپ در نبود مغناطیس‌سنج.

Fig. 18. Comparison of gyroscope biases estimates in the absence of magnetometer.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله الگوریتم تخمین وضعیت برای ماهواره چمران ۱ با تلفیق حسگرهای خورشید، مغناطیس‌سنج و ژيروسکوپ با استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته پیاده‌سازی شد که در آن مدل فرایند براساس

تفاوت در این است که روش کواترنیونی این خطا را در قالب کواترنیون خطا اعمال می‌کند، در حالی که روش ماتریس کسینوس هادی از ماتریس دوران کوچک استفاده می‌کند.

در نهایت بر مبنای روابط استخراج شده و نمودارهای بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که هر دو روش از نظر مدل فیلتر و ساختار خطای فیلتر کالمن توسعه یافته مشابه هستند، اما از نظر نمایش وضعیت و پایداری عددی تفاوت دارند. روش کواترنیون به دلیل تعداد مؤلفه کمتر، حذف تکنیکی‌های اویلری و نیاز به تنها یک نرمال‌سازی ساده، از نظر عددی پایدارتر و برای تخمین وضعیت ماهواره مناسب‌تر است. در مقابل، روش ماتریس کسینوس هادی اگرچه تفسیر هندسی واضح‌تری دارد، اما برای حفظ خاصیت دوران معتبر، نیازمند بازمتعادسازی مداوم است.

مراجع

- [1] M. N. Sweeting, "Smaller Satellites: Bigger Business?," *Springer Netherlands*, vol. 6, pp. 1-19, 2002, <https://doi.org/10.1007/97894-017-3008-2>.
- [2] Z. You, "Attitude determination and control system of the micro/nano satellite," *Space Microsystems and Micro/nano Satellites*, Butterworth-Heinemann, pp. 75-114, 2018, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812672-1.00003-5>.
- [3] F. L. Markley, "Attitude determination using two vector measurements," *Flight Mechanics Symp.*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, USA, 1999.
- [4] F. L. Markley and D. Mortari, "Quaternion Attitude Estimation Using Vector Observations," *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 48, pp. 359-380, 2000, <https://doi.org/10.1007/BF03546284>.
- [5] H. D. Black, "A passive system for determining the attitude of a satellite," *AIAA Journal*, Vol. 2, no. 7, pp. 1350-1351, 1964, <https://doi.org/10.2514/3.2555>.
- [6] D. Cilden Guler, E. S. Conguroglu, and C. Hajiyev, "Single-frame attitude determination methods for nanosatellites," *Metrology and Measurement Systems*, Vol. 24, no. 2, pp. 313-324, 2017, <https://doi.org/10.1515/mms-2017-0023>.
- [7] M. Schmidt, K. Ravandoor, O. Kurz, S. Busch, and K. Schilling, "Attitude determination for the pico-satellite UWE-2," *Proceedings IFAC World Congress*, Vol. 41, no. 2, pp. 14036-14041, Seoul, 2008, <https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.02376>.
- [8] S. Ghuffar, "Design and implementation of attitude determination algorithm for the cubesat UWE-3," M. S. thesis, University of Wuerzburg Institute of Robotics and Telematics, Germany, 2010.

اعمال می‌شود. این ساختار باعث می‌شود تصحیح وضعیت به‌صورت یک دوران کوچک معتبر انجام شود، نه به‌صورت جمع مستقیم مؤلفه‌ها. از این جهت، روش کواترنیونی از نظر عددی پایدارتر از نمایش‌هایی مانند زوایای اویلر است و برای کاربردهای فضایی مناسب‌تر است.

در روش ماتریس کسینوس هادی، وضعیت دورانی با ماتریس دوران $C_b^o \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ نمایش داده می‌شود. این ماتریس باید دو شرط اساسی زیر را ارضا کند:

$$\det(C_b^o) = 1 \quad \text{و} \quad C_b^o C_o^b = I_{3 \times 3}$$

یعنی سطرهای یا ستون‌های آن باید بردارهای یک‌ه و متعامد باشند. اما در محاسبات عددی، به‌ویژه در اثر انتگرال‌گیری مرحله انتشار و ضرب‌های ماتریسی متوالی، ممکن است این شرایط به‌تدریج نقض شوند.

به همین دلیل در شبیه‌سازی پس از مرحله تصحیح، فرآیند بازمتعادسازی انجام می‌شود. اگر سطرهای ماتریس طبق روابط (۳۴) تا (۳۷) متعامدسازی و در نهایت هر سطر جدید نرمال‌سازی شود، این روند باعث می‌شود ماتریس کسینوس هادی دوباره به فضای ماتریس‌های دوران معتبر، نزدیک شود. بنابراین، برخلاف روش کواترنیون که فقط نیازمند نرمال‌سازی یک بردار چهارمؤلفه‌ای است، در روش ماتریس کسینوس هادی باید هم تعامد و هم یک‌ه بودن محورهای مختصات حفظ شود.

۶-۲ مقایسه ساختاری دو روش

از دیدگاه ساختاری، روش کواترنیون با چهار مؤلفه وضعیت را نمایش می‌دهد، اما تنها یک قید واحد بودن دارد. در مقابل، ماتریس کسینوس هادی با ۹ مؤلفه وضعیت را نمایش می‌دهد و قیود بیشتری را باید حفظ کند. اگرچه ماتریس کسینوس هادی از نظر فیزیکی و هندسی تفسیر مستقیمی دارد، اما از نظر عددی حساس‌تر است؛ زیرا ماتریس دوران در طول زمان ممکن است از خاصیت متعامد بودن خارج شود.

در روش کواترنیون، شرط معتبر بودن وضعیت با رابطه ساده $q^T q = 1$ کنترل می‌شود، اما در روش ماتریس کسینوس هادی باید رابطه ماتریسی $C_b^o C_o^b = I_{3 \times 3}$ حفظ شود. از این رو، هزینه حفظ قید در ماتریس کسینوس هادی بیشتر از کواترنیون است.

۶-۳ مقایسه عملکرد در ساختار فیلتر کالمن

در هر دو روش، بردار حالت خطای فیلتر طبق رابطه (۲۱) شامل دو بخش اصلی $\delta \theta$ و δb_g است که هر یک به ترتیب بردار خطای زاویه‌ای کوچک و بردار خطای بایاس ژيروسکوپ می‌باشند. بنابراین تفاوت اصلی این دو رویکرد در ساختار بردار خطای فیلتر کالمن توسعه یافته نیست، بلکه در نحوه اعمال تصحیح وضعیت است. در روش کواترنیون طبق رابطه (۲۷) و در روش ماتریس کسینوس هادی طبق رابطه (۳۳) تصحیح وضعیت با استفاده از خطای کوچک دورانی انجام می‌شود.

[10] H. E. Soken and S. Sakai, "Attitude estimation and magnetometer calibration using reconfigurable TRIAD+filtering approach," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 99, 2020, Art. no. 105754, <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105754>.

[9] A. Finance, C. Dufour, T. Boutéraon, A. Sarkissian, A. Mangin, P. Keckhut, and M. Meftah, "In-orbit attitude determination of the UVSQ-SAT CubeSat using TRIAD and MEKF methods," *Sensors*, Vol. 21, Art. no. 7361, 2021, <https://doi.org/10.3390/s21217361>.

Article in Press