

Original Research Paper

A Near-Optimal Approach for Planning Continuous-Thrust Orbital Transfers Considering Oblate Perturbation

Fateme Jafarian¹, Majid Bakhtiari^{2*} , and Ehsan Abbasali³

1,2. School of Advanced Technologies, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

3. College of Interdisciplinary Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History:

Received 29 July 2025

Revised 31 October 2025

Accepted 31 October 2025

Available Online 03 November 2025

Keywords:

Continues-thrust maneuver

Genetic algorithm

Near-optimal approach

Oblate perturbation

Trajectory design

ABSTRACT

This paper presents a novel approach for the optimal design of the orbital transfer trajectory of a satellite with proposed continuous-thrust. In this study, the thrust direction angle is approximated using a truncated Fourier series, with the Fourier coefficients selected via a genetic algorithm. The goal of this optimization is to ensure the satellite reaches the desired position in the final orbit while achieving tangential conditions at the entry and exit points, thereby minimizing fuel consumption. The advantage of the proposed method is its ability to account for orbital perturbations, such as the Earth's oblateness effect, without significantly increasing computational complexity. Additionally, the proposed model does not require a predefined number of orbital revolutions, offering high flexibility in mission design. Numerical results and simulations demonstrate that this method provides accurate and efficient transfers between different orbits. Furthermore, performance analysis of this method under varying parameters, such as thrust force and initial orbital conditions, shows its robustness and adaptability. Overall, this paper provides an efficient framework for designing continuous thrust maneuvers in space missions, leading to reduced fuel consumption, shorter operation times, and optimized mission costs.


* Corresponding Author's E-mail: bakhtiari_m@iust.ac.ir

How to Cite this Article:

F. Jafarian, M. Bakhtiari, and E. Abbasali, "A near-optimal approach for planning continuous-thrust orbital transfers considering oblate perturbation," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. ??, No. ??, pp. 1-12, ????, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jsst.2025.1562>.



COPYRIGHTS

© 2025 by the authors. Published by ARI. This article is an open access article distributed under the terms and  ACCESS conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

مقاله پژوهشی

یک رویکرد نزدیک به بهینه به منظور برنامه ریزی یک مانور پیشران پیوسته با در نظر گیری اغتشاش پخیدگی زمین

فاطمه جعفریان^۱، مجید بختیاری*^۲، و احسان عباسعلی^۳

- ۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
 ۲- استادیار، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
 ۳- دکتری، دانشکده علوم و فناوری‌های میان رشته‌ای، دانشگاه تهران، تهران، ایران

چکیده

اطلاعات مقاله

این مقاله به ارائه یک رویکرد نوین برای طراحی بهینه مسیر انتقال مداری یک ماهواره با رانش پیوسته می‌پردازد. در این پژوهش، زاویه نشانه‌روی پیشران به‌عنوان پارامتر کنترلی با استفاده از سری فوریه محدود تقریب زده شده و ضرایب سری فوریه از طریق الگوریتم ژنتیک انتخاب شده است. هدف از این بهینه‌سازی، تضمین رسیدن به موقعیت مطلوب در مدار نهایی و تحقق شرایط مماسی در نقاط ورود و خروج جهت کاهش میزان پیشران مصرفی است. مزیت روش پیشنهادی، توانایی آن در لحاظ کردن اغتشاشات مداری، مانند اثر پخیدگی زمین، بدون افزایش قابل توجه پیچیدگی محاسبات است. مدل پیشنهادی همچنین نیازی به تعیین تعداد چرخش‌های مداری از پیش ندارد؛ بنابراین انعطاف‌پذیری بالایی در طراحی مأموریت دارد. نتایج عددی به‌دست‌آمده و شبیه‌سازی‌های انجام شده نشان می‌دهند که این روش، دقت و کارایی مناسبی در انتقال بین مدارهای مختلف دارد. همچنین، تحلیل عملکرد این روش در برابر تغییرات پارامترهایی نظیر نیروی رانش و شرایط اولیه مداری، نشان‌دهنده پایداری و قابلیت تطبیق بالایی آن است. در مجموع، این مقاله یک چارچوب کارآمد برای طراحی مانورهای رانش پیوسته در مأموریت‌های فضایی ارائه داده است که به کاهش مصرف سوخت، کاهش زمان انجام عملیات و بهینه‌سازی هزینه‌های کلی مأموریت منجر شده است.

تاریخچه مقاله:

دریافت ۰۵ مرداد ۱۴۰۴
 بازنگری ۰۹ آبان ۱۴۰۴
 پذیرش ۰۹ آبان ۱۴۰۴
 اولین انتشار ۱۲ آبان ۱۴۰۴

واژه‌های کلیدی:

مانور رانش پیوسته
 الگوریتم ژنتیک
 رویکرد نزدیک به بهینه
 اغتشاش پخیدگی زمین
 طراحی مسیر

پست الکترونیکی نویسنده مسئول: bakhtiari_m@iust.ac.ir

How to Cite this Article:

F. Jafarian, M. Bakhtiari, and E. Abbasali, "A near-optimal approach for planning continuous-thrust orbital transfers considering oblate perturbation," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. ??, No. ??, pp. 1-12, ????, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jsst.2025.1562>.



COPYRIGHTS

© 2025 by the authors. Published by ARI. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

علائم و اختصارات

نماد	شرح
a_0	ضریب ثابت سری فوریه
a_{\square}	ضرایب کسینوسی سری فوریه زاویه رانش
b_{\square}	ضرایب سینوسی سری فوریه زاویه رانش
d	اندیس مربوط به نقطه یا مدار هدف
e	خروج از مرکز مدار
f	اندیس مربوط به نقطه یا مدار نهایی
h	تکانه زاویه‌ای
i	زاویه میل مداری
I_{sp}	ضربه ویژه
J_1-J_4	توابع هدف در الگوریتم بهینه‌سازی
J_2	ضریب پخیدگی زمین
n	شماره جمله در سری فوریه
n_r	تعداد جملات سری فوریه
r	شعاع یا فاصله از مرکز زمین
\dot{r}	مؤلفه شعاعی سرعت
\ddot{r}	مؤلفه شعاعی شتاب
r_{\square}	شعاع حوضی مداری
r_a	شعاع اوج مداری
r_d	بردار موقعیت در نقطه هدف
r_f	بردار موقعیت در انتهای مسیر انتقال
R	شعاع زمین
T	کل زمان انتقال یا زمان پرواز
\vec{T}_a	بردار شتاب رانشی
\vec{v}	بردار سرعت ماهواره
\vec{v}_d	بردار سرعت در مدار هدف
Z	ارتفاع مداری نسبت به سطح زمین
z_{\square}	ارتفاع حوضی مداری نسبت به سطح زمین
Z_a	ارتفاع اوج مداری نسبت به سطح زمین
α	زاویه نشان‌دهنده پیشران
γ	زاویه مسیر پرواز
ε	آستانه همگرایی یا دقت بهینه‌سازی
θ	زاویه مرکزی یا زاویه موقعیت مداری

نماد	شرح
θ_d	زاویه در نقطه هدف یا مدار مقصد
θ_f	زاویه در انتهای مسیر انتقال
$\dot{\theta}$	نرخ تغییر زاویه
$\ddot{\theta}$	شتاب زاویه‌ای
Ω	طول گرهِ صعودی
ω	آرگومان حوضی
μ	پارامتر گرانشی زمین
v	آنومالی حقیقی

مقدمه

در بسیاری از مأموریت‌های فضایی، انتقال یک ماهواره از مدار اولیه به مدار از پیش تعیین شده، یکی از مراحل کلیدی و تأثیرگذار بر عملکرد نهایی مأموریت محسوب می‌شود. طراحی این مسیر انتقالی باید به گونه‌ای انجام شود که با کمترین مصرف سوخت و در کوتاه‌ترین زمان ممکن، ماهواره به موقعیت هدف خود در مدار نهایی برسد. در این میان، نوع مانور مداری انتخاب شده و نحوه زمان‌بندی آن نقش بسیار مهمی در بهینه‌سازی کل مأموریت دارد [۱]. با توجه به تطابق بالای مانورهای رانش پیوسته با شرایط واقعی مأموریت‌های عملیاتی، در این مقاله یک روش نوین برای طراحی مسیر انتقالی یک ماهواره با استفاده از مانور پیوسته پیشنهاد شده است. در این مقاله از رویکرد نزدیک به بهینه استفاده شده است که هدف آن، کاهش زمان مأموریت، کاهش مصرف سوخت و ساده‌سازی محاسبات می‌باشد. بهینه‌سازی مسیرهای رانش پیوسته یکی از موضوعات پُراهمیت و پرتکرار در مطالعات اخیر بوده و تاکنون توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. مطالعات متعددی برای حل این مسئله از روش‌های گوناگونی بهره گرفته‌اند. لی و همکاران [۲] با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی، مسیرهای بهینه برای انجام مانورهای انتقال مداری بین دو مدار دلخواه را طراحی کرده‌اند. هدف آن‌ها یافتن بهترین مسیر برای حرکت ماهواره از یک مدار به مدار دیگر، در شرایطی بوده که نیروی گرانش نیز در نظر گرفته شده است. الگوریتم‌های تکاملی به آن‌ها کمک کرده تا راه‌حلی پیدا کنند که مصرف سوخت را کاهش داده و دقت رسیدن به مدار هدف را افزایش دهند. فکور و همکاران [۳] انتقال مداری بهینه از مدار پایین زمین به مدار زمین‌ثابت را با در نظر گرفتن مدارهای دایره‌ای و با استفاده ترکیبی از روش‌های تحلیلی و الگوریتم کلونی زنبور مصنوعی تحلیل کرده‌اند. بتس [۴] به بررسی انتقال‌های کم‌رانش با در نظر گرفتن نواحی خسوف پرداخته و از روش کنترل بهینه برای ایجاد

روشی مبتنی بر تقریب زاویه نشانه روی پیشران با سری فوریه محدود و بهینه‌سازی چند هدفه برای طراحی یک مانور رانش پیوسته تک‌ماهورهای پیشنهاد شده است که می‌تواند به‌عنوان روشی مؤثر و نزدیک به واقعیت عملیاتی در مأموریت‌های فضایی مورد استفاده قرار گیرد.

معادلات حاکم بر مسئله

در این مقاله، روشی نوآورانه برای بهینه‌سازی فرایند انتقال مدارهای ماهواره معرفی شده است که بر پایه مانور رانش پیوسته و با رویکرد نزدیک به بهینه طراحی شده است. در روش پیشنهادی، زاویه جهت‌گیری رانش با سری فوریه ضریب ثابت تقریب زده شده است که این تقریب در معادلات حرکت مدارهای در مختصات قطبی به کار گرفته می‌شود. یکی از مهم‌ترین مزایای این روش آن است که می‌توان به راحتی تأثیر اغتشاشات مدارهای مانند پخیدگی زمین را در محاسبات وارد کرد. همچنین، پیاده‌سازی این روش نسبتاً ساده است و در بسیاری از موارد می‌تواند پاسخ‌های نسبتاً دقیق و سریع برای مسائل پیچیده مدارهای ارائه دهد. در این رویکرد ضرایب سری فوریه از طریق الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک انتخاب شده است که توابع هدف آن تضمین رسیدن به نقطه استقرار مطلوب و برقراری شرایط مماسی بین مدار انتقال و مدار هدف است که منجر به کاهش زمان انتقال و مصرف سوخت می‌شود. علاوه بر این، برخلاف روش‌های مبتنی بر شکل، در این رویکرد نیازی به تعیین اولیه تعداد دورهای مدارهای انتقال وجود ندارد و امکان بهینه‌سازی منعطف مسیر فراهم شده است. از عوامل مؤثر بر مأموریت انتقال مدارهای می‌توان به تأثیر المان‌های مدارهای عظیم و هدف و تأثیر اغتشاشات فضایی اشاره کرد که در این مقاله به بررسی تأثیر عناصر مدارهای پرداخته شده است. نتایج عددی نشان‌دهنده دقت و کارایی بالای روش پیشنهادی در شرایط مختلف مدارهای از جمله تغییرات در مقدار خروج از مرکز و نیروی رانش می‌باشند. در این مقاله از معادلات حرکت در چارچوب مرجع لخت و با استفاده از مختصات دکارتی استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\ddot{\vec{r}}(t) + \frac{\mu}{r^3} \vec{r}(t) = \vec{T}_a \quad (1)$$

که در آن بردار موقعیت ماهواره، بردار شتاب ماهواره نسبت به مرکز جرم زمین، بردار شتاب رانشی، و پارامتر گرانشی به ترتیب به \vec{r} ، \vec{T}_a ، و μ نشان داده شده است. در ادامه برای حل این معادلات دو روش نزدیک به بهینه و روش مبتنی بر شکل بررسی و مقایسه شده است. در شکل ۱ هندسه مسئله با پیشران پیوسته در مختصات قطبی نشان داده شده است.

تخمین اولیه و حل مجموعه‌ای از مسائل کنترل بهینه چند مرحله‌ای استفاده کرده است. در پژوهش دیگری، وارگا و پرز [۵] انتقال مدارهای رانش پیوسته و چند دور گردش را با در نظر گرفتن اثرات پخیدگی زمین و خسوف بررسی کرده‌اند. طراحی و بهینه‌سازی مسیر انتقال مدارهای با استفاده از رانش پیوسته، از جمله موضوعاتی است که توجه بسیاری از پژوهشگران حوزه دینامیک فضایی و مأموریت‌های ماهواره‌ای را به خود جلب کرده است. برخلاف مانورهای ضربه‌ای که در آن‌ها رانش در بازه‌های زمانی بسیار کوتاه اعمال می‌شود، در مانورهای رانش پیوسته، نیروی رانش کوچک ولی در بازه زمانی طولانی‌تری اعمال می‌شود که این امر طراحی مسیر را به مسئله‌ای پیچیده و غیرخطی تبدیل می‌کند. از سوی دیگر، پونتانی و کانوی [۶] یک روش جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی طراحی کرده‌اند که در آن، تابع ریاضی همپلتون ساخته می‌شود و معادلات دقیق برای محاسبه مسیر بهینه استخراج می‌شود. همچنین برای حدس اولیه مقادیر متغیرها از الگوریتم ازدحام ذرات استفاده شده است. این ترکیب باعث می‌شود که جواب بهینه سریع‌تر پیدا شود. همچنین، اسریساوت و دوتا [۷] مدلی دینامیکی جدید برای مدل‌سازی مانورهای افزایش ارتفاع مدارهای رانش پیوسته پیشنهاد داده‌اند که دقت محاسبات را در انتقال به مدار زمین‌آهنگ بهبود بخشیده است. در کنار این رویکردها، کلویور و اولسون [۸] نیز از روش مستقیم برای محاسبه انتقال‌های نزدیک بهینه بین مدارهای زمین‌پایه استفاده کرده‌اند. هاوبرکون و همکاران [۹] نیز با استفاده از رویکرد هموتوبی، مسئله انتقال مدارهای با هدف بیشینه‌سازی جرم نهایی را تحلیل کرده‌اند. این تحلیل منجر به دستیابی به یک الگوی کنترل ناپیوسته شامل چندین قوس رانشی مجزا گردیده است. در مطالعه‌ای مرتبط، طاهری و عبدالخالق [۱۰] از سری فوریه برای تقریب شکل مسیر در مسائل رانش پیوسته استفاده کرده‌اند. در این روش، مسیر با یک تابع مشخص توصیف شده و ضرایب آن از طریق قیود مرزی تعیین می‌گردند. در این روش، لحاظ کردن اغتشاشات محیطی پیچیدگی زیادی ایجاد می‌کند و همگرایی به پاسخ مطلوب را با چالش مواجه می‌سازد. در این مقاله، منظور از رانش پیوسته به‌طور مشخص پیشران الکتریکی از نوع پیشران یونی است. پیشران‌های یونی رانش اندک را در بازه‌های طولانی فراهم می‌کنند و با وجود مزیت ISP بالا، به توان الکتریکی محدود بوده و ممکن است در بازه‌های خسوف دچار توقف رانش شوند. برای بازتولیدپذیری نتایج، مدل پیشران یونی با ISP ثابت به کار گرفته شده است. در مجموع، با وجود پیشرفت‌های قابل توجه در روش‌های عددی و الگوریتم‌های فراابتکاری برای طراحی مانورهای رانش پیوسته، همچنان نیاز به رویکردهایی که در عین سادگی بتوانند اغتشاشات محیطی را نیز به‌درستی مدل‌سازی کنند، احساس می‌شود. در همین راستا، این مقاله

زمان بر است. این دشواری ناشی از به وجود آمدن معادلات پیچیده در روش های مبتنی بر شکل، چالش هایی در تعیین ضرایب مورد نیاز برای طراحی مانور بهینه ایجاد می کند. برای غلبه بر این مشکل، در این مقاله روشی نوین پیشنهاد شده است که در آن به جای استفاده از تابع مبتنی بر شکل با متغیرهای r یا θ به عنوان متغیرهای حالت، زاویه ی نشانده روی پیشران به عنوان پارامتر کنترلی در نظر گرفته شده و به وسیله سری فوریه تقریب زده شده است.

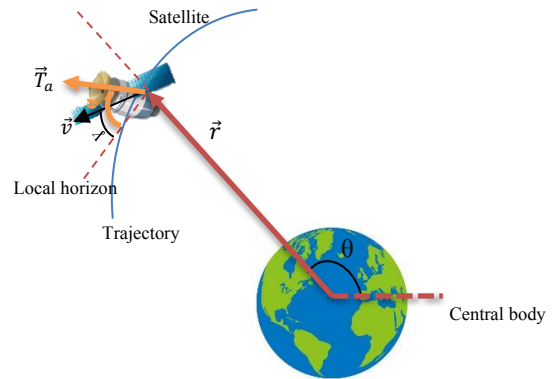
در گام نخست، با توجه به اینکه هر تابع متناوب پیوسته را می توان به صورت مجموعی از توابع سینوسی و کسینوسی بیان کرد، پیشنهاد شده است از سری فوریه محدود با ضرایب ثابت استفاده شود. در این روش، سری فوریه محدود جایگزین زاویه جهت گیری رانش (α) در معادله (۲) شده است. در این روش، ضرایب ثابت سری فوریه با استفاده از الگوریتم بهینه سازی ژنتیک تعیین شده است. زاویه نشانده روی پیشران در معادله (۲) همراه با در نظر گرفتن اغتشاشات پخیدگی زمین جایگزین شده است چرا که این اغتشاش به عنوان تأثیرگذارترین عامل در تغییرات مداری به ویژه برای مدارهای نزدیک زمین شناخته می شود و بیشترین سهم را در دقت مدل سازی حرکتی فضاپیما ایفا می کند. در نهایت معادلات حرکت با در نظر گرفتن اغتشاشات پخیدگی زمین در معادلات (۶-۴) قابل مشاهده است.

$$a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_r} \{a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)\} \quad (4)$$

$$\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t) + \frac{\mu}{r(t)^2} \left[\frac{1}{r^3(t)} + \frac{(\frac{3}{2})R^2 J_2 r^2(t)}{r^7(t)} \right] = T_a \sin \left[\frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{n_r} a_n \cos \left(\frac{n\pi t}{T} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi t}{T} \right) \right] \quad (5)$$

$$2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t) = T_a \cos \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_r} a_n \cos \left(\frac{n\pi t}{T} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi t}{T} \right) \right] \quad (6)$$

در مجموعه معادلات (۶-۴)، T کل زمان پرواز و n_r تعداد جملات فوریه است. با افزایش تعداد جملات زاویه پیشران با دقت بیشتری تقریب زده خواهد شد. این روش این مزیت را دارد که تابع تقریب سری فوریه را جایگزین زاویه پیشران (α) می کند و سمت چپ معادله حرکت را تغییر نمی دهد. بنابراین، با در نظر گرفتن هر نوع اغتشاش فضایی، معادله ای ساده و کوتاه به دست می آید که حل معادله را تسهیل می کند. برای تعیین ضرایب سری فوریه در معادلات (۶-۴)، از الگوریتم بهینه سازی ژنتیک استفاده شده است. در این رویکرد، هر کروموزوم معرف یک مجموعه کامل از ضرایب فوریه و



شکل ۱- بردار موقعیت ماهواره.

Fig. 1. The state vector of the satellite.

در شکل ۱ بردار موقعیت ماهواره نسبت به مرکز زمین با \vec{r} نشان داده شده است، همچنین زاویه بردار موقعیت با محور \hat{x} زاویه θ نامیده شده است. γ زاویه بین افق محلی و بردار سرعت است که زاویه مسیر پرواز نامیده شده است. زاویه بین افق محلی و بردار شتاب رانشی (\vec{T}_a)، زاویه ی نشانده روی پیشران (α) نامیده شده است. در نتیجه معادله حرکت در مختصات قطبی به صورت زیر نوشته می شود [۱۱].

$$\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t) + \frac{\mu}{r(t)^2} = T_a \sin(\alpha(t)) \quad (2)$$

$$2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t) = T_a \cos(\alpha(t))$$

همان طور که در مقدمه ذکر شد، برخی از تحقیقات قبل، از تقریب های مبتنی بر شکل با پیشران پیوسته استفاده کرده اند. به عنوان مثال کاونوی و همکاران [۱۲] از یک تابع چندجمله ای معکوس که در معادله (۳) نشان داده شده به عنوان تابع مبتنی بر شکل استفاده کردند تا شکل مدار انتقالی را با یک چند جمله ای مرتبه پنج برای مسیر پرواز با زمان آزاد بیان کنند.

$$r(\theta) = \frac{1}{a+b\theta+c\theta^2+d\theta^3+e\theta^4+f\theta^5} \quad (3)$$

وال و کاونوی تابع چندجمله ای معکوس را مطابق معادله (۳) پیشنهاد کردند تا شکل مدار انتقال را با یک چندجمله ای مرتبه پنجم مدل سازی کنند. جایگذاری معادله (۳) در معادله (۲) منجر به معادله ای طولانی و پیچیده می شود. این محققان روش های حل مسئله دو شرایط مرزی تقریبی مانند برنامه ریزی غیرخطی^۱ را برای به دست آوردن ضرایب توابع مبتنی بر شکل ارائه دادند که پیاده سازی آن دشوار و

$$\begin{aligned} j_1 &= \min |r_d - r_f| \\ j_2 &= \min |\theta_d - \theta_f| \\ j_3 &= \min |\dot{r}_d - \dot{r}_f| \\ j_4 &= \min |\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_f| \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن f نشان‌دهنده نقطه انتهایی مسیر انتقال و d نشان‌دهنده نقطه رسیدن مسیر انتقال به مدار هدف روی مدار هدف است. توابع هدف j_1 و j_2 اطمینان حاصل می‌کنند که مدار انتقال به نقطه استقرار مطلوب می‌رسد، در حالی که توابع هدف j_3 و j_4 از مماس بودن مسیر انتقال با مدار هدف در نقطه ورود ماهواره به مدار هدف اطمینان حاصل می‌کند. همانطور که ذکر شد شرایط مماسی بین مسیر انتقال و مدار هدف می‌تواند مسیر را از نظر مصرف سوخت بهینه کند. در ادامه زاویه نشانه‌روی پیشران α در نقطه خروج برابر صفر در نظر گرفته شده است ($\alpha(0) = 0$)، تا شرط مماسی بین مسیر انتقال و مدار اولیه نیز تضمین شود.

$$\frac{a_0}{2} = -\sum_{n=1}^{n=n_r} a_n \quad (10)$$

در نتیجه، یکی از پارامترهای طراحی حذف می‌شود و فرایند بهینه‌سازی ساده‌تر می‌شود. در ادامه شبیه‌سازی دو مدار دایروی با شعاع‌های متفاوت و یک مدار بیضوی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این شبیه‌سازی شعاع حسیض و شعاع اوج، زاویه میل مداری، زاویه طول گره صعودی و زاویه آرگومان حسیض به ترتیب با نمادهای r_p ، r_a ، i° ، Ω° و ω° نمایش داده شده‌اند. ضرایب ثابت سری فوریه، زمان انتقال، و آنومالی حقیقی مدار عزیمت و هدف به‌عنوان پارامترهای طراحی الگوریتم ژنتیک انتخاب شده‌اند. در این حالت، اگر مقادیر تابع هزینه کمتر از ε باشد، شرایط معادله برآورده خواهد شد. بنابراین، معیار توقف الگوریتم ژنتیک مطابق معادله (۱۱) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} \varepsilon &> j_1 \\ \varepsilon &> j_2 \\ \varepsilon &> j_3 \\ \varepsilon &> j_4 \end{aligned} \quad (11)$$

در بخش شبیه‌سازی و نتایج، به‌منظور اعتبارسنجی رویکرد ارائه شده و ارزیابی کارایی آن در شرایط عملیاتی گوناگون، نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی ارائه و مورد تحلیل قرار خواهند گرفت. این شبیه‌سازی شامل رسم مدارهای عزیمت، هدف و مسیر ماهواره می‌باشد. در ادامه نیز تغییرات زاویه‌ی نشانه‌روی پیشران رسم شده است.

پارامترهای مأموریت است. برای هر فرد جمعیت، ابتدا مقادیر ضرایب در معادلات حرکت جایگذاری شده و مسیر انتقال به صورت عددی محاسبه می‌شود. سپس شرایط مرزی شامل تطابق بردارهای مکان و سرعت با مدار هدف و نیز مماس بودن مسیر انتقال (معادلات ۷ و ۸) بررسی شده و میزان انحراف در قالب توابع هدف محاسبه می‌شود. علاوه بر این، مصرف سوخت بر اساس رابطه ارزیابی می‌شود. الگوریتم ژنتیک با استفاده از انتخاب رتبه‌ای، عملگرهای کراس‌اور تک‌نقطه‌ای و جهش گوسی، ضرایب مناسب‌تر را در نسل‌های بعدی تولید می‌کند. روند بهینه‌سازی تا زمانی ادامه می‌یابد که مقادیر توابع هدف به کمتر از ε برسد یا حداکثر نسل تعیین شده تکمیل شود. در نهایت، ضرایب سری فوریه انتخاب شده توسط الگوریتم ژنتیک، شرایط مرزی را برآورده کرده و مسیر بهینه انتقال مداری را فراهم می‌سازند.

همچنین، استفاده از الگوریتم ژنتیک برای به‌دست آوردن ضرایب ثابت، اجرای آن را ساده‌تر کرده است. برای بهره‌گیری از الگوریتم ژنتیک، ابتدا توابع هدف مسئله تعریف شده‌اند. تابع هدف اول و دوم به‌گونه‌ای تعریف شده است که مسیر انتقال به مدار هدف منطبق شود و تابع هدف سوم و چهارم به‌گونه‌ای تعریف شده است که به‌منظور کاهش مصرف سوخت مسیر انتقال به مدار هدف، مماس شود. فرض کنید ما مشخصات مداری مدار هدف را می‌دانیم که آنومالی حقیقی نقطه استقرار مطلوب در مدار هدف با v_d نشان داده شده است. با تبدیل المان‌های مداری به مختصات کارترزین، بردار موقعیت و سرعت ماهواره به ترتیب به صورت $\vec{r}_d = [x_d, y_d, z_d]$ و $\vec{v}_d = [v_{x_d}, v_{y_d}, v_{z_d}]$ نشان داده شده است. سپس، از این اطلاعات برای تعریف شرط مرزی استفاده شده است. این شرایط کمک می‌کند تا مطمئن شویم مسیر انتقال ماهواره به‌درستی طراحی شده و به نقطه‌ی مورد نظر روی مدار نهایی خواهد رسید. این شرایط در معادله (۷) نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} r_d &= \sqrt{x_d^2 + y_d^2} \\ \theta_d &= \cos^{-1}\left(\frac{x_d}{r_d}\right) \\ \dot{r}_d &= \left(\frac{\mu}{h_d}\right) e_d \sin(v_d) \\ \dot{\theta}_d &= \left(\frac{\mu}{h_d}\right) (1 + e_d \cos(v_d)) \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن r_d ، θ_d ، e_d ، h_d ، سرعت زاویه‌ای و سرعت شعاعی را در نقطه استقرار مطلوب مدار هدف نشان می‌دهند. مجموعه توابع هدف در معادله (۸) بیان شده است.

شبیه‌سازی و نتایج

ارتفاع مدار هدف برابر با ۵۰۰۰ کیلومتر در نظر گرفته شده است و سایر پارامترهای مداری صفر فرض شده‌اند. مشخصات مداری مدارهای عزیمت و هدف در جدول ۱ ارائه شده‌اند هدف اصلی این است که با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی مناسب، مسیر انتقال ماهواره به گونه‌ای تعیین شود که مصرف سوخت به حداقل برسد و در عین حال به مدار هدف با کمترین زمان و نوسانات دست یابد. مشخصات مداری مدارهای عزیمت و هدف در جدول ۱ ارائه شده‌اند. با توجه به مشخصات مداری ارائه شده در جدول ۱ و قیدهای مطرح شده در معادله ۸ از الگوریتم ژنتیک برای یافتن مقادیر پارامترهای زاویه آنومالی حقیقی ماهواره در مدارهای اول و دوم، ضرایب سری فوریه، و زمان کل انتقال استفاده شده است که این پارامترها در جدول ۲ برای سه مقدار پیشران ۰/۰۰۵ نیوتن، ۰/۰۱ نیوتن و ۰/۰۵ نیوتن نشان داده شده است.

جدول ۱- المان‌های مداری مدار عزیمت و هدف در مطالعه اول.

Table 1. orbital elements of the departure and target orbits in the first study.

	Z(km)	v°	ω°	i	e	Ω
Departure orbit	1000	The value selected by genetic algorithm	0	0	0	0
Target orbit	5000	The value selected by genetic algorithm	0	0	0	0

در این بخش، نتایج حاصل از شبیه‌سازی انتقال مداری ماهواره از مدار عزیمت به مدار هدف، با رویکرد شبه بهینه، بررسی و تحلیل شده است. معادلات حرکت در مختصات قطبی با در نظر گرفتن اثر اغتشاشات پخیدگی زمین پیاده‌سازی شده‌اند و زاویه نشان‌دهنده روی پیشران به عنوان پارامتر کنترلی، با استفاده از سری فوریه محدود تقریب زده شده است. ضرایب سری فوریه، به همراه زمان کل انتقال و آنومالی‌های حقیقی نقطه ورود و خروج ماهواره، از طریق الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک به گونه‌ای تعیین شده‌اند که شرایط مرزی و قیود مسئله برآورده شوند. تحلیل نتایج شامل ارزیابی استقرار ماهواره در موقعیت نهایی روی مدار هدف، بررسی مماس بودن مسیر انتقال با مدار هدف، تأثیر مقدار رانش روی زمان و مسیر انتقال در سناریوهای مختلف است. این بررسی‌ها در قالب سه مطالعه و برای حالت‌های مختلفی از مدارهای دایروی و بیضوی و مقادیر متفاوت نیروی رانش صورت گرفته است. در این مطالعات مقدار ε برابر ۰/۰۰۱ و isp برابر ۳۴۰۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. همچنین با توجه به ویژگی‌های عملکردی پیشران‌های یونی، پیشران در نظر گرفته شده برای این شبیه‌سازی از نوع پیشران‌های یونی می‌باشد.

مطالعه اول

در مطالعه اول، یک مانور انتقال مداری بین دو مدار دایروی در نظر گرفته شده است. در این سناریو، ارتفاع مدار عزیمت برابر با ۱۰۰۰ کیلومتر و

جدول ۲- متغیرهای انتخاب شده توسط الگوریتم ژنتیک در مطالعه اول.

Table 2. Chosen value by genetic algorithm in first study

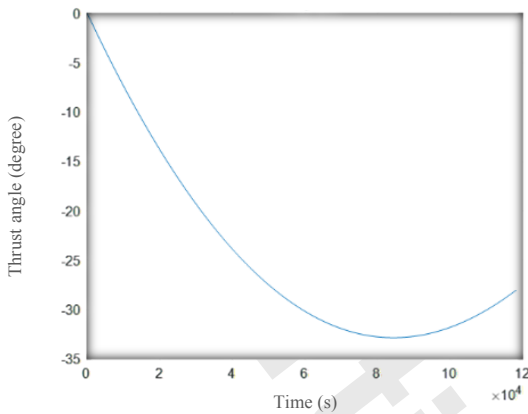
	Thrust	v_a°	v_d°	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	T(s)
First maneuver	0.005	317.900	242.100	67.770	303.401	-25.339	74.154	59.308	-38.137	99.250	-109.300	1.175×10^5
Second maneuver	0.010	195.640	251.240	51.142	16.000	-78.153	-90.883	-86.302	264.400	-38.370	-424.100	41862.000
Third maneuver	0.050	113.050	278.647	138.880	-21.092	-242.580	84.440	-161.610	133.110	286.360	-234.080	23054.000

استفاده از توابع هدف طراحی شده و الگوریتم ژنتیک، ماهواره می‌تواند با یک مانور مداری مماس به مدار هدف برسد و در نتیجه مصرف سوخت به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. این ویژگی مهم، به‌ویژه در ماموریت‌هایی که محدودیت سوخت دارند، اهمیت زیادی دارد.

در ادامه، زاویه رانشگر که با استفاده از سری فوریه تقریب زده شده است، در شکل‌های ۵ تا ۷ نشان داده شده است. این زاویه برای سه مقدار پیشران مختلف به‌طور مجزا رسم شده است

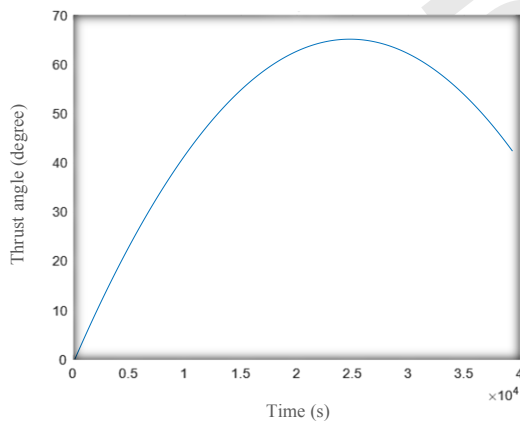
در ادامه، شبیه‌سازی‌هایی برای مانورهای مختلف با پیشران‌های متفاوت انجام شده است. این شبیه‌سازی‌ها برای سه مقدار پیشران ۰/۰۰۵ نیوتن، ۰/۰۱ نیوتن و ۰/۰۵ نیوتن انجام شده و نتایج آن‌ها در شکل‌های ۲ تا ۴ قابل مشاهده است.

در این شبیه‌سازی مدار عزیمت و هدف با رنگ قرمز و مسیر ماهواره با رنگ آبی ترسیم شده است. همان‌طور که در نتایج شبیه‌سازی‌ها مشاهده می‌شود، در نقطه ورود ماهواره به مدار هدف، مدار انتقال به‌طور کامل بر مدار هدف منطبق است در نتیجه با



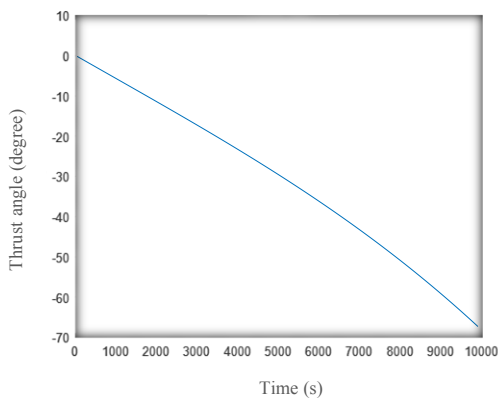
شکل ۵- زاویه نشانه‌روی پیشران در مانور مداری با تراست ۰/۰۰۵ نیوتن در مطالعه اول.

Fig. 5. Thrust angle during the orbital maneuver with a 0.005(N) thruster (Study 1).



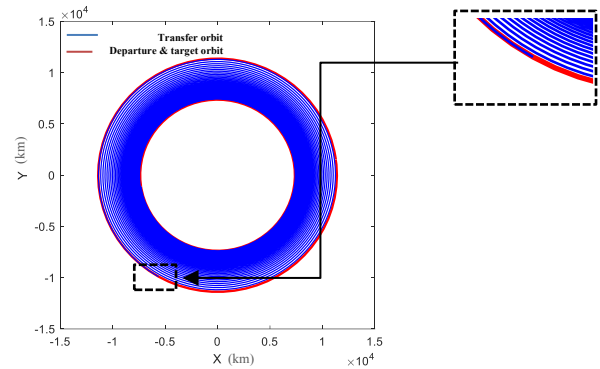
شکل ۶- زاویه نشانه‌روی پیشران در مانور مداری با تراست ۰/۰۱ نیوتن در مطالعه اول.

Fig. 6. Thrust angle during the orbital maneuver with a 0.01(N) thruster (Study 1).



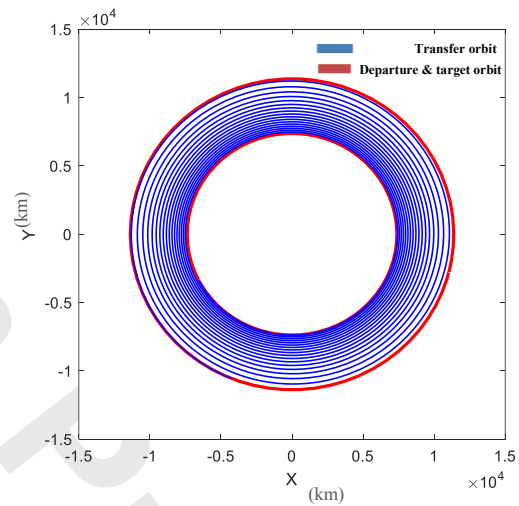
شکل ۷- زاویه نشانه‌روی پیشران در مانور مداری با تراست ۰/۰۵ نیوتن در مطالعه اول.

Fig. 7. Thrust angle during the orbital maneuver with a 0.05(N) thruster (Study 1).



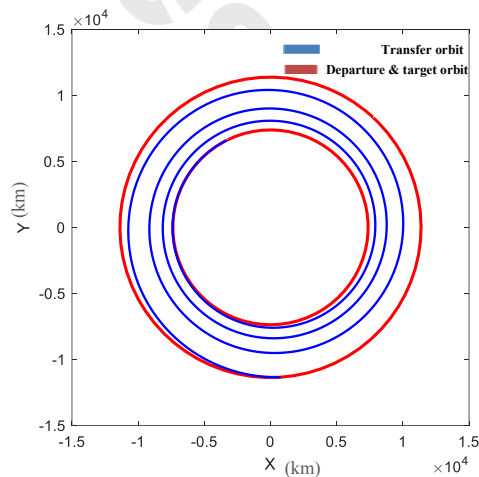
شکل ۲- شبیه‌سازی مانور مداری با پیشران ۰/۰۰۵ نیوتن در مطالعه اول.

Fig. 2. Simulation of the orbital maneuver with a 0.005 (N) thruster (Study 1).



شکل ۳- شبیه‌سازی مانور مداری با پیشران ۰/۰۱ نیوتن در مطالعه اول.

Fig. 3. Simulation of the orbital maneuver with a 0.01 (N) thruster (Study 1).



شکل ۴- شبیه‌سازی مانور مداری با پیشران ۰/۰۵ نیوتن در مطالعه اول.

Fig. 4. Simulation of the orbital maneuver with a 0.05 (N) thruster (Study 1).

ذکر شده است. جدول ۳ شامل المان‌های کلیدی مداری هر دو مدار عزیمت و هدف است. این المان‌ها شامل پارامترهایی همچون میل گرانشی (Ω)، انحراف مداری (e)، زاویه انحراف (i)، زاویه افقی (ω)، زاویه آنومالی حقیقی (v) و ارتفاع مداری می‌باشند. ارتفاع مدار عزیمت ۱۰۰۰ کیلومتر و ارتفاع مدار هدف ۹۰۰۰ کیلومتر انتخاب شده‌اند تا بازه وسیع‌تری از انتقال مداری را پوشش دهند.

جدول ۳- المان‌های مداری مدار عزیمت و هدف مطالعه دوم.

Table 3. orbital elements of the departure and target orbits in the second study.

	Z(km)	v°	ω°	i	e	Ω
Departure orbit	1000	The value selected by genetic algorithm	0	0	0	0
Target orbit	9000	The value selected by genetic algorithm	0	0	0	0

مطالعه دوم

در دومین مطالعه، انتقال مداری بین دو مدار با شعاع‌های بزرگ‌تر و اختلاف ارتفاع بیشتر نسبت به سناریوی اول بررسی شده است. هدف از این مطالعه، ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی در شرایطی است که تفاوت ارتفاع میان مدار عزیمت و مدار هدف بیشتر باشد و چالش‌های جدیدی را در طراحی مسیر انتقال ایجاد کند. مشخصات مداری هر دو مدار عزیمت و هدف که برای این تحلیل انتخاب شده‌اند، در جدول ۳

جدول ۴- متغیرهای بهینه شده توسط الگوریتم ژنتیک در مطالعه دوم.

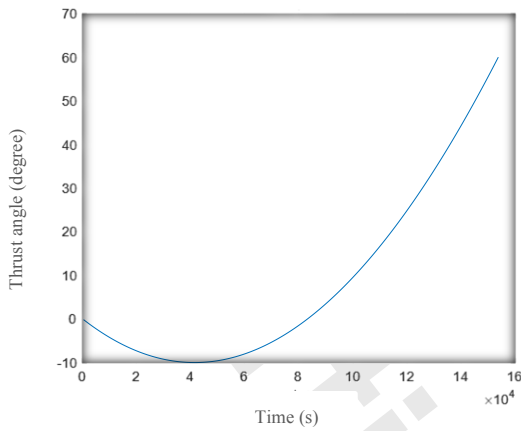
Table 4. chosen value by genetic algorithm in second study.

	Thrust	v_a°	v_d°	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	T(s)
First maneuver	0.005	96.780	154.91	56.549	57.260	-99.327	-83.343	-35374	3.707	-69.925	82.200	4.153×10^5
Second maneuver	0.010	79.890	226.532	77.602	-173.780	270.800	69.193	-99.385	45.370	-54.344	-54.021	537354
Third maneuver	0.050	112.510	03.110	250.620	-0.301	-197.600	-151.006	21.780	-238.390	-32.561	-27.044	11863

نمودارها رفتار زاویه رانشگر را در طول زمان نشان می‌دهند. نتایج حاصل در این مطالعه نیز نشان می‌دهند که رویکرد پیشنهادی می‌تواند با موفقیت مسیر انتقالی تولید کند که در نقطه ورود به مدار مقصد، مماس با آن بوده و شرایط مرزی بدرستی برقرار شده‌اند. از سوی دیگر، شبیه‌سازی‌های صورت گرفته با سه سطح مختلف از نیروی پیشران بیانگر آن هستند که مدل پیشنهادی از پایداری و دقت بالایی در مواجهه با تغییرات مشخصات پیشران برخوردار است. نمودارهای ترسیم شده از مسیر انتقال نشان می‌دهند که نقطه انتهایی مسیر حرکت ماهواره با مدار هدف به‌خوبی انطباق دارد، و همچنین شکل زاویه نشانه‌روی پیشران برای هر پیشران نرم، پیوسته و قابل پیاده‌سازی است.

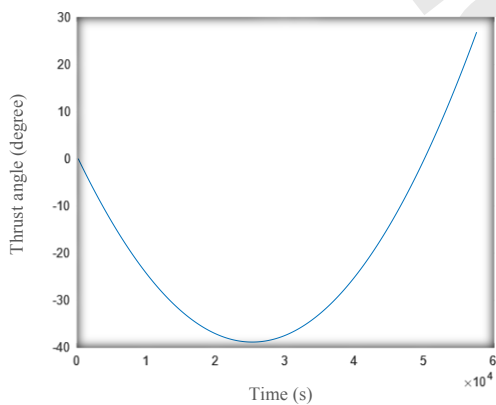
در این مطالعه نیز پارامترهای زاویه آنومالی حقیقی مدار اول، زاویه آنومالی حقیقی مدار دوم، ضرایب سری فوریه و زمان کل به‌وسیله الگوریتم ژنتیک انتخاب شده و در جدول ۴ نشان داده شده است. مسیر انتقال برای پیشران‌های ۰/۰۰۵ نیوتن، ۰/۰۱ نیوتن و ۰/۰۵ نیوتن به‌همراه مدار عزیمت و هدف رسم شده است. این مدارها در شکل ۸ تا ۱۰ قابل مشاهده هستند.

نتایج شبیه‌سازی‌ها حاکی از آن است که، مشابه سناریوی اول، مسیر حرکت ماهواره در نقطه ورود به مدار هدف کاملاً مماس بر آن است. این انطباق دقیق مسیر نشان دهنده کیفیت بالای الگوریتم بهینه‌سازی و رویکرد پیشنهادی است. زاویه نشانه‌روی پیشران نیز برای هر سه مقدار نیروی پیشران در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ رسم شده است. این



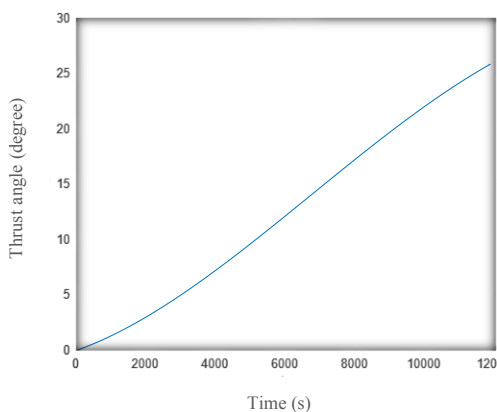
شکل ۱۱- زاویه نشانه‌روی پیشران در مانور مداری با پیشران ۰/۰۰۵ نیوتن در مطالعه دوم.

Fig. 11. Thrust angle during the orbital maneuver with a 0.005 (N) thruster (Study 2).



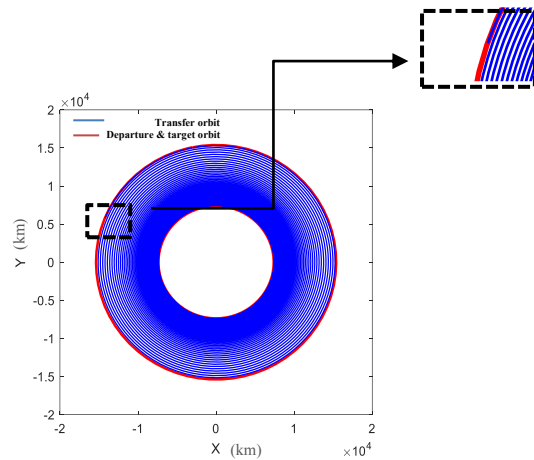
شکل ۱۲- زاویه نشانه‌روی پیشران در مانور مداری با پیشران ۰/۰۱ نیوتن در مطالعه دوم.

Fig. 12. Thrust angle during the orbital maneuver with a 0.01 (N) thruster (Study 2).



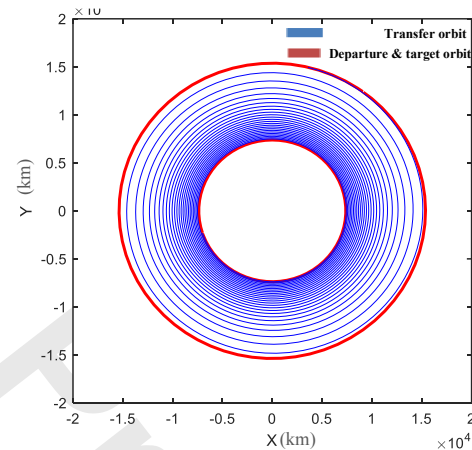
شکل ۱۳- زاویه نشانه‌روی پیشران در مانور مداری با پیشران ۰/۰۵ نیوتن در مطالعه اول.

Fig. 13. Thrust angle during the orbital maneuver with a 0.05 (N) thruster (Study 2).



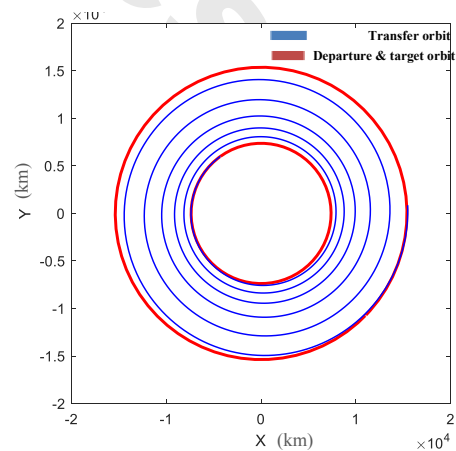
شکل ۸- شبیه‌سازی مانور مداری با پیشران ۰/۰۰۵ نیوتن در مطالعه دوم.

Fig. 8. Simulation of the orbital maneuver with a 0.005 (N) thruster (Study 2).



شکل ۹- شبیه‌سازی مانور مداری با پیشران ۰/۰۱ نیوتن در مطالعه دوم.

Fig. 9. Simulation of the orbital maneuver with a 0.01 (N) thruster (Study 2).



شکل ۱۰- شبیه‌سازی مانور مداری با پیشران ۰/۰۵ نیوتن در مطالعه دوم.

Fig. 10. Simulation of the orbital maneuver with a 0.05 (N) thruster (Study 2).

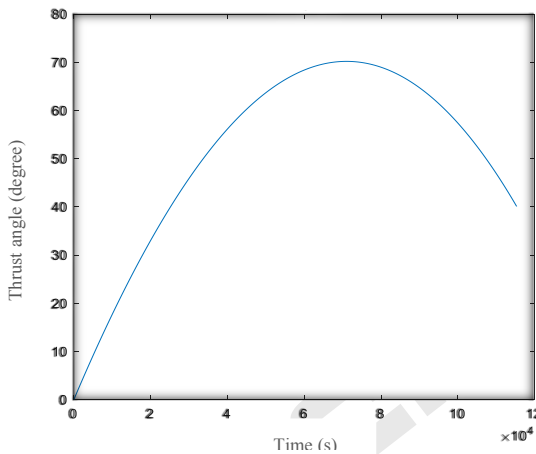
مطالعه سوم

در این مطالعه انتقال مداری از مدار بیضی با ارتفاع اوج ۳۰۰۰ کیلومتر و حضیض ۱۰۰۰ کیلومتر به مدار دایروی با ارتفاع ۵۰۰۰ کیلومتر شبیه‌سازی شده است. نیروی پیشران در این مطالعه برابر ۰/۰۱ نیوتن در نظر گرفته شده است. مشخصات مدارها برای مطالعه سوم مطابق مشخصات ذکر شده در جدول ۵ می‌باشد.

جدول ۵- المان‌های مداری مدار عزیمت و هدف در مطالعه سوم.

Table 5 orbital elements of the departure and target orbits in the third study.

	Z(km)	v°	ω°	i°	e	Ω°
Departure orbit	Zp=1000 Za=3000	The value selected by genetic algorithm	240	0	0.119	0
Target orbit	5000	The value selected by genetic algorithm	0	0	0	0



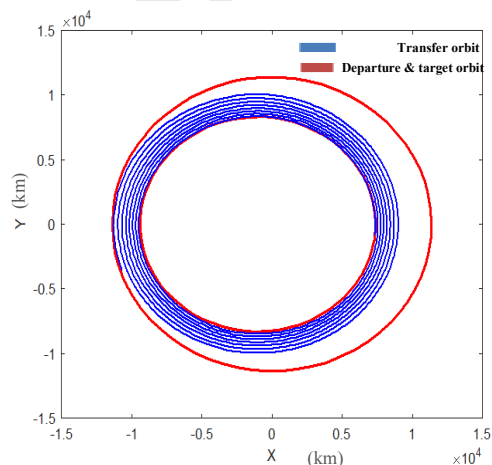
شکل ۱۵- زاویه نشان‌دهنده نیروی پیشران در مانور مداری با تراست ۰/۰۱ در مطالعه سوم.

Fig. 15. Thrust angle during the orbital maneuver with a 0.01 (N) thruster (Study 3).

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک رویکرد نوآورانه برای طراحی بهینه مسیر انتقال مداری با استفاده از رانش پیوسته معرفی شده است که در آن زاویه رانش رانشگر به صورت تابعی از زمان با استفاده از سری فوریه با ضرایب ثابت مدل‌سازی شده و ضرایب آن از طریق الگوریتم ژنتیک انتخاب می‌شوند. این روش به طور قابل توجهی زمان انتقال ماهواره و مصرف سوخت را کاهش می‌دهد که از اهمیت ویژه‌ای در مأموریت‌های فضایی برخوردار است. هدف اصلی این پژوهش، توسعه مدلی ساده، قابل پیاده‌سازی، و درعین حال مؤثر برای بهینه‌سازی مسیر انتقال مداری بین دو مدار هست؛ به گونه‌ای که قیود نهایی کاملاً برآورده شده و درعین حال زمان انتقال بهینه شود. روش ارائه شده، مزایایی چون پیوستگی تابع، سادگی مشتق‌گیری حل معادلات و سهولت در نظرگیری اغتشاشات دارد. به منظور بهینه‌سازی ضرایب سری فوریه از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است که به خوبی توانست ضرایب سری فوریه را طوری تعیین کند که انتقال مداری به صورت دقیق و با خطای قابل قبولی صورت گیرد. نتایج شبیه‌سازی‌هایی که در چند سناریو مختلف انجام شد، حاکی از کارایی بالای روش پیشنهادی بود. شبیه‌سازی‌ها نشان داد که کنترل زاویه رانش در قالب سری فوریه می‌تواند پاسخگوی نیازهای دقیق مانورهای مداری باشد. علاوه بر این، منحنی‌های رانش و زاویه از نظر عملیاتی برای پیاده‌سازی با رانشگرهای واقعی به‌ویژه رانشگرهای کم‌رانش مانند الکتریکی بسیار مطلوب است روش پیشنهادی نه تنها از لحاظ مفهومی ساده و قابل تعمیم است، بلکه در عمل نیز کارایی بالایی از خود نشان می‌دهد. انتظار می‌رود این رویکرد بتواند در طراحی مأموریت‌های آینده، خصوصاً در مأموریت‌های با رانش کم یا با نیاز به دقت بالا در تنظیم

در ادامه فرایند بهینه‌سازی مشابه مطالعه اول و دوم تکرار شده است و مقدار پارامترهای زاویه آنومالی حقیقی مدار اول، زاویه آنومالی حقیقی مدار دوم و زمان کل انتقال، توسط الگوریتم ژنتیک، به ترتیب ۰/۲۳۵۱/۳ درجه، ۲۴/۱۹۴ درجه و ۳۹۲۱۱ ثانیه محاسبه شده است. نتیجه شبیه‌سازی انتقال مداری در شکل ۱۴ قابل مشاهده است. زاویه نشان‌دهنده نیروی پیشران نیز در شکل ۱۵ رسم شده است.



شکل ۱۴- شبیه‌سازی مانور مداری با پیشران ۰/۰۱ نیوتن در مطالعه سوم.

Fig. 14. Simulation of the orbital maneuver with a 0.01 (N) thruster (Study 3).

- [5] G. I. Varga and J. M. Sánchez Pérez, "Many-revolution low-thrust orbit transfer computation using equinoctial Q-law including J_2 and eclipse effects," in *6th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques*, Darmstadt, Germany, vol. 1, pp. 29-42, 2016.
- [6] M. Pontani and B. Conway, "Optimal low-thrust orbital maneuvers via indirect swarming method," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 162, pp. 272-292, 2014, <https://doi.org/10.1007/s10957-013-0471-9>.
- [7] S. Sreesawet and A. Dutta, "A novel methodology for fast and robust computation of low-thrust orbit-raising trajectories," in *27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, San Antonio, Texas, 2017, pp. 1571-1590.
- [8] C. A. Kluever and S. R. Oleson, "Direct approach for computing near-optimal low-thrust earth-orbit transfers," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 35, no. 4, pp. 509-515, 1998, <https://doi.org/10.2514/2.3360>.
- [9] T. Haberkorn, P. Martinon, and J. Gergaud, "Low-thrust minimum-fuel orbital transfer: A homotopic approach," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 27, no. 6, pp. 1046-1060, 2004, <https://doi.org/10.2514/1.4022>.
- [10] E. Taheri and O. Abdelkhalik, "Shape-based approximation of constrained low-thrust space trajectories using Fourier series," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 49, no. 3, pp. 535-546, 2012, <https://doi.org/10.2514/1.58789>.
- [11] E. Abbasali, M. Bakhtiari, and A. Panahyazdah, "An approach to near-optimal continuous-thrust solution : plane constellation deployment," *Advances in Space Research*, vol. 75, no. 1, pp. 1217-1230, 2025, <https://doi.org/10.1016/j.asr.2024.09.032>.
- [12] B. J. Wall and B. A. Conway, "Shape-based approach to low-thrust rendezvous trajectory design," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 32, no. 1, pp. 95-101, 2009, <https://doi.org/10.2514/1.36848>.

مدار، جایگزین مناسبی برای روش‌های سنتی باشد. به‌عنوان گام بعدی، پیشنهاد می‌شود که این مدل در محیط سه‌بعدی با در نظر گرفتن عوامل اغتشاشی مانند بیضوی بودن زمین، فشار تابشی، و رانشگرهای محدود شوند، توسعه داده شده و همچنین از الگوریتم‌های یادگیری تقویتی در بهینه‌سازی آن بهره گرفته شود.

تعارض منافع

هیچگونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

مراجع

- [1] D. Malyuta, Y. Yu, P. Elango, and B. Açıkmeşe, "Advances in trajectory optimization for space vehicle control," *Annual Reviews in Control*, vol. 52, pp. 282-315, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2021.04.013>.
- [2] S. Lee, P. Von Allmen, W. Fink, A. F. Petropoulos, and R. J. Terrile, "Design and optimization of low-thrust orbit transfers," in *Aerospace Conference*, Big Sky, MT, USA, 2005, <https://doi.org/10.1109/AERO.2005.1559377>.
- [3] M. Fakoor, S. Sadeghi, and M. Bakhtiari, "Investigation of Low Thrust Optimal Orbital Transfer from LEO to GEO Considering Circular Orbits," *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 67, no. 1, pp. 77-97, 2020, <https://doi.org/10.1007/s40295-019-00184-1>.
- [4] J. T. Betts, "Optimal low-thrust orbit transfers with eclipsing," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 36, no. 2, pp. 218-240, 2015, <https://doi.org/10.1002/oca.2111>.