

Original Research Paper

Three-Dimensional Stress Analysis of Cross-ply Composite Cylindrical Shells under Radial Load

Mohsen Vaezi¹, Isa Ahmadi^{2*} , and Neda Ataei³

Faculty of Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran

ARTICLE INFO

Article History:

Received 03 September 2025

Revised 27 October 2025

Accepted 28 October 2025

Available Online 03 November 2025

Keywords:

First keyword

Three-dimensional stress analysis

Composite cylindrical shell

Cross-ply layup

Radial loading

Layer-wise theory

ABSTRACT

The application of laminated fibrous composite materials is increasing in many structures such as shell and plates especially related to applications in aerospace engineering. In this paper, the three-dimensional stress distribution in an cross-ply laminated composite cylindrical shell subjected to radial loading is investigated. The formulation is based on a layer-wise, displacement-based theory. First, the displacement and strain field of a cylindrical shell is derived within the framework of the layer-wise theory. Then, by employing the principle of minimum total potential energy, the governing equations of motion and the corresponding boundary conditions for the cross-ply laminated composite cylindrical shell are obtained. An analytical solution is subsequently developed for the governing equations, and the edge boundary conditions are applied to the solution. In the numerical results section, the convergence and accuracy of obtained numerical results are examined with available results in the literature, and stress distributions in a cross-ply composite cylindrical shell which is subjected to lateral loading are computed, and various results corresponding to different loading distributions are presented., the effect of various parameter and the numerical results are investigated.


* Corresponding Author's E-mail: i_ahmadi@znu.ac.ir

How to Cite this Article:


M. Vaezi, I. Ahmadi, and N. Ataei, "Three-dimensional stress analysis of cross-ply composite cylindrical shells under radial load," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. ??, No. ??, pp. 1-15, ????, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jsst.2025.1591>.



COPYRIGHTS

© 2024 by the authors. Published by ARI. This article is an open access article distributed under the terms and  ACCESS conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

تحلیل سه بعدی تنش در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه گذاری متعام تحت بارگذاری شعاعی

محسن واعظی^۱، عیسی احمدی^{۲*} , و ندا عطائی^۳

۱- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

۳- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

چکیده

کاربرد کامپوزیت‌های لایه‌ای الیافی در سازه‌های مختلف مخصوصاً در کاربردهای مربوط به مهندسی هوافضا روز به روز در حال افزایش است. در این مقاله توزیع تنش‌های سه‌بعدی در یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعام که تحت بارگذاری گسترده به‌صورت شعاعی قرار دارد، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. برای فرمول‌بندی مساله از تئوری لایه‌ای بر مبنای جابه‌جایی استفاده شده است. ابتدا میدان جابه‌جایی و کرنش در پوسته استوانه‌ای بر اساس تئوری لایه‌ای نوشته شده است، سپس با استفاده اصل حداقل انرژی پتانسیل کل، معادلات حرکت حاکم بر مساله و شرایط مرزی متناسب برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعام در تئوری لایه‌ای به‌دست آمده است، در نهایت معادلات حاکم برای استوانه کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعام حل شده و شرایط مرزی در لبه‌های استوانه اعمال شده است. سپس در قسمت نتایج عددی، صحت‌سنجی نتایج عددی با مقایسه این نتایج حاضر با نتایج موجود در منابع انجام شده است و نشان داده شده است که تئوری لایه‌ای ارائه شده برای حل مساله کارایی و دقت بالایی دارد. همچنین همگرایی پیش‌بینی تئوری لایه‌ای با افزایش تعداد لایه‌های عددی بررسی شده است. سپس نتایج عددی متعدد برای توزیع تنش‌های سه بعدی برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعام که تحت بارگذاری جانبی است، محاسبه شده است و نتایج متعددی از توزیع تنش‌های مختلف ارائه شده است. همچنین اثر پارامترهای مختلف بر نتایج عددی مورد بررسی قرار گرفته است.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۲ شهریور ۱۴۰۴

بازنگری ۰۵ آبان ۱۴۰۴

پذیرش ۰۶ آبان ۱۴۰۴

اولین انتشار ۱۲ آبان ۱۴۰۴

واژه‌های کلیدی:

تحلیل سه بعدی تنش
پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی
لایه‌گذاری متعام
بارگذاری غیر متقارن
تئوری لایه‌ای

پست الکترونیکی نویسنده مسئول: i_ahmadi@znu.ac.ir

How to Cite this Article:

M. Vaezi, I. Ahmadi, and N. Ataei, "Three-dimensional stress analysis of cross-ply composite cylindrical shells under radial load," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. ??, No. ??, pp. 1-15, ????, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jsst.2025.1591>.



COPYRIGHTS

© 2024 by the authors. Published by ARI. This article is an open access article distributed under the terms and  conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

علائم و اختصارات

m	تغییرات بار نسبت به مختصه محیطی
S	نسبت شعاع متوسط به ضخامت پوسته
CLT	تئوری کلاسیک ورق‌ها

مقدمه

امروزه مواد کامپوزیتی به دلیل خواص ویژه‌ای که دارند مانند نسبت بالای استحکام به وزن، مقاومت عالی در برابر خوردگی و قابلیت طراحی بر اساس نیازهای خاص، جایگاه ویژه‌ای در صنایع پیشرفته، به ویژه صنعت هوافضا پیدا کرده‌اند. در ساخت بسیاری از سازه‌های هوایی مانند هواپیماها و فضاپیماها، کاهش وزن سازه بدون افت عملکرد مکانیکی از اهمیت حیاتی برخوردار است، زیرا مستقیماً بر مصرف سوخت، ظرفیت باربری و کارایی پروازی اثر می‌گذارد. علاوه بر این، توانایی مواد کامپوزیتی در تحمل شرایط محیطی شدید، از جمله تغییرات دما و فشار، آن‌ها را به گزینه‌ای مناسب برای اجزای حساس و حیاتی هوافضا تبدیل کرده است. به همین دلیل، تحلیل دقیق رفتار سازه‌های کامپوزیتی و شناخت پدیده‌های خاص در این مواد، برای اطمینان از ایمنی و عملکرد بهینه در کاربردهای هوافضایی ضروری است. در این میان پوسته‌های کامپوزیتی نیز کاربرد بسیار زیادی در صنایع مختلف دارد. از طرف دیگر پژوهشگران با تجزیه و تحلیل در ساختار کامپوزیت‌های چندلایه به این نکته دست یافته‌اند که در ساختارهای ناهمسانگرد و ناهمگن کامپوزیت‌های چندلایه، پدیده‌های منحصر به فردی می‌تواند در ابعاد هندسی مختلفی اتفاق بیافتد. یکی از این پدیده‌ها، پدیده لایه مرزی است که در سازه‌های کامپوزیتی مشاهده می‌شود که در آن مقدار تنش‌های عمودی و برشی بین لایه‌ای (Interlaminar Stresses) در نزدیکی مرزهای سازه کامپوزیتی به صورت ناگهانی افزایش می‌یابد که این افزایش تنش در نزدیکی لبه ممکن است منجر به جدایش لایه‌ها شود. همچنین به علت تفاوت قابل توجه خواص مکانیکی لایه‌های مختلف در مواد کامپوزیتی مانند مدول الاستیسیته و مدول برشی، صرف نظر کردن از کرنش‌های برشی بین لایه‌ای در این سازه‌ها (مانند تئوری کلاسیک ورق‌ها) ممکن است خطای بالایی را به وجود آورد.

توزیع تنش برشی بین لایه‌ای در سازه‌های کامپوزیتی به طور کلی شکل پیچیده‌ای دارد. در آنالیز یک چندلایه کامپوزیتی زمانی که تاکید اصلی برای تعیین پاسخ کلی سازه‌های کامپوزیتی نظیر تعیین بار بحرانی کماتش، تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها و یا خیز سازه باشد، استفاده از تئوری‌های تک لایه‌ای معادل مانند تئوری کلاسیک و تئوری‌های برشی مخصوصاً برای سازه‌های نازک مناسب است و می‌تواند پیش‌بینی قابل قبولی برای رفتار سازه ارائه کند. در این

نماد	شرح
R	شعاع متوسط
L	طول استوانه
x	راستای طولی استوانه
θ	مختصه محیطی استوانه
r	راستای شعاعی استوانه
h	ضخامت پوسته
w و v, u	مولفه‌های جابه‌جایی در راستای محوری، محیطی و شعاعی
$q_i(x, \theta)$	بار گسترده شعاعی وارده بر سطح داخلی پوسته
$q_o(x, \theta)$	بار گسترده شعاعی وارد بر سطح خارجی پوسته
W_i و V_i, U_i	جابه‌جایی سطوح عددی نام در تئوری لایه‌ای
$\Phi_i(z)$	تابع درون‌یاب لاگرانژی
N	تعداد کل لایه‌های عددی
n_p	تعداد لایه‌های عددی در هر لایه‌ی فیزیکی
$\Psi_i^j(z)$	تابع درون‌یاب لاگرانژ محلی خطی در لایه i ام
δU	تغییرات انرژی کرنشی
δW_{ext}	کار مجازی نیروی خارجی
E_3 و E_2, E_1	مدول‌های الاستیسیته در راستای اصلی
G_{13}, G_{12} و G_{23}	مدول‌های برشی
v_{23} و v_{13}, v_{12}	ضرایب پواسون
ϵ	کرنش
δ_{ij}	دلتای کرونیگر
Q^k, R^k, M^k و N^k	منتجه‌های تنش لایه عددی k
σ_r	تنش نرمال برشی
σ_θ	تنش نرمال محیطی
$\sigma_{x\theta}, \sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}$	تنش‌های برشی بین لایه‌ای
σ_r^*	تنش نرمال برشی بی‌بعد
σ_θ^*	تنش نرمال محیطی بی‌بعد
$\sigma_{rx}^*, \sigma_{x\theta}^*$	تنش‌های برشی بین لایه‌ای بی‌بعد
$\sigma_{r\theta}^*$	
q_0	دامنه بار شعاعی گسترده

نرمال عمودی عبوری از لایه‌ها صرف‌نظر شده است. در ادامه، پیپ [۳] در سال ۱۹۷۱ نشان داد که اثر لایه مرزی در صفحات کامپوزیتی به ناحیه‌ای نزدیک به لبه محدود می‌شود که ضخامت آن تقریباً برابر با ضخامت صفحه است.

پیپ و پاگانو [۴] در سال ۱۹۷۴ با بهره‌گیری از روش تفاضل محدود و حل معادلات کاهش‌یافته الاستیسیته، موفق شدند نتایج عددی برای تنش‌های برون‌صفحه‌ای در صفحات متقارن و متعادل ارائه دهند. تنگ و لوی [۵] تنش‌های برون‌صفحه‌ای در صفحات کامپوزیتی تحت بار کششی را با استفاده از نظریه لایه‌ای لبه محور محاسبه کردند و نتایج به‌دست آمده را با راه‌حل تحلیلی پوپا و اونسن و همچنین حل عددی پیپ و پاگانو مقایسه نمودند. سپس هسو و هراکویچ [۶] با استفاده از روش اغتشاش، پدیده لایه مرزی را برای ورق‌های زاویه‌دار کامپوزیتی بررسی کردند. وانگ و دیکسون [۷] نیز از روش گلرکین توسعه یافته بر پایه جابه‌جایی‌ها استفاده کردند و تنش‌های بین‌لایه‌ای را به کمک چندجمله‌ای‌های لژاندر نمایش دادند. رن [۸] یک راه‌حل دقیق الاستیسیته برای پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه تحت خمیدگی استوانه‌ای به‌دست آورد که با نتایج نظریه‌های کلاسیک و نظریه دونل مقایسه شده است. روش بار تعادلی نیز توسط کاساپوگلو و لاگاس [۹] برای لایه‌های متقارن تحت بار پیچشی غیر برخط، و توسط لین و همکاران [۱۰] برای لایه‌های متقارن و نامتقارن تحت بارهای کششی، خمشی و پیچشی پیشنهاد شده است. چاودری [۱۱] یک روش نیمه تحلیلی برای پیش‌بینی توزیع تنش برشی بین لایه‌ها در پوسته‌های کامپوزیتی ضخیم پیشنهاد کرد. در تحلیل او، فرض بر این بود که در جهت جانبی، پوسته کشش‌ناپذیر است. وارادان و بهاسکار [۱۲] یک حل تحلیلی برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ارائه کردند که تحت بار جانبی شعاعی قرار دارد. بین [۱۳] با بهره‌گیری از عملگرهای لکنیتسکی، تنش‌های لبه آزاد در لایه‌هایی تحت بار پیچشی، خمشی و کششی غیربرخط را محاسبه کرده است. یی و سولداتوس [۱۴] تنش‌های سه‌بعدی را در پوسته‌های استوانه‌ای توخالی و همچنین پنل‌ها با لایه‌گذاری متعامد را به‌دست آوردند. در مطالعه‌ای، مایکل استارباک [۱۵] تنش‌ها را در استوانه‌های کامپوزیتی تحت بار محوری نامتقارن تحلیل کرده است. اگرچه هندسه استوانه متقارن است، اما در بسیاری از موارد بارهای اعمال شده نامتقارن‌اند و تحلیل دقیق تنش در این حالت ضروری است. در این پژوهش، راه‌حلی بسته برای تعیین تنش، کرنش و جابه‌جایی در استوانه‌های کامپوزیتی تحت بارهای داخلی، خارجی، پیچشی و خمشی ارائه شده است.

در سال ۲۰۰۰، کانت و سوامیناتان [۱۶] مروری جامع بر پژوهش‌های گذشته درباره تنش‌های برون‌صفحه‌ای در ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی ارائه دادند. در این مطالعه، روش‌های تحلیلی و

تئوری‌ها، یک لایه با ضرایب سفتی معادل جایگزین سازه کامپوزیتی چند لایه شده و مساله سه بعدی الاستیسیته به یک مساله دو بعدی کاهش می‌یابد. تئوری‌های تک‌لایه معادل توانایی بررسی تنش‌های بین لایه‌ای را در کامپوزیت‌های چندلایه به دو دلیل اساسی ندارند ۱- در این تئوری‌ها از تنش‌های بین لایه‌ای صرف‌نظر می‌شود یا فرم ساده از پیش تعیین شده‌ای برای این تنش‌ها در نظر می‌گیرد. این فرض در مواد همگن با دقت بالایی صحیح است ولی در کامپوزیت‌ها تنش‌های بین لایه‌ای مخصوصاً در نزدیکی لبه‌ها قابل صرف‌نظر نیستند و فرم‌های پیچیده‌ای دارند. ۲- در ارزیابی و تحلیل سه‌بعدی تنش به‌منظور بررسی خرابی در کامپوزیت‌ها، تئوری‌های تک لایه معادل امکان پیش‌بینی پدیده‌هایی مثل جدایش لایه‌ها و خرابی از سطح مشترک لایه‌ها را ندارند. چرا که تئوری‌های تک لایه معادل معمولاً با ساده‌سازی از این تنش‌ها صرف‌نظر کرده و یا آن‌ها را با دقت کافی پیش‌بینی نمی‌کنند. اگرچه در نقاط دور از لایه مرزی نتایج تئوری‌های تک لایه معادل معتبر می‌باشند، ولی مناسبانه این تئوری‌ها توانایی در نظر گرفتن پدیده‌های موضعی مثل پدیده لایه مرزی را ندارند و یا از دقت کافی برخوردار نیستند. تئوری‌های لایه‌ای دارای این قابلیت هستند که نتایج بسیار خوبی برای تنش‌های بین لایه‌ای در مجاورت لبه‌های آزاد پیش‌بینی کنند. اگر چه این دسته از تئوری‌ها جایگزین مناسبی برای حل الاستیسیته می‌باشند، اما می‌توان به برخی از مشکلات آن مثل تعداد بالای متغیرها و معادلات درگیر در مساله و سنگین بودن حجم محاسبات در آن اشاره کرد، چرا که تعداد این متغیرها وابسته به تعداد لایه‌های فرضی تئوری لایه‌ای است که در حل مساله در نظر گرفته می‌شود. تئوری لایه‌ای ردی با بسط میدان جابه‌جایی در راستای ضخامت، معادلات دیفرانسیل سه‌بعدی را به معادلات دیفرانسیل دو بعدی تبدیل می‌کند. مزیت این روش بر روش تک لایه معادل این است که این روش با تقسیم ضخامت لایه به لایه‌های فرضی و استخراج معادلات برای این لایه‌ها توانایی در نظر گرفتن تغییرات در راستای ضخامت سازه را دارد و لذا تئوری لایه‌ای توانایی محاسبه تنش‌های برون‌صفحه‌ای در هر لایه را دارد.

در این قسمت مروری کوتاه بر تحقیقات پیشین در این زمینه انجام می‌شود. از جمله پیشگامان این حوزه می‌توان به هایاشی [۱] و همچنین پوپا و اونسن [۲] اشاره کرد که به بررسی تنش‌های بین‌لایه‌ای برشی در لایه‌های کامپوزیتی ارتوتروپ، جدا شده با لایه‌های چسبنده ایزوتروپ، پرداخته‌اند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان می‌دهد که یکی از مؤلفه‌های تنش برشی بین لایه‌ای در لبه آزاد به مقدار قابل توجهی افزایش می‌یابد. با این حال، به دلیل فرض حالت تنش صفحه‌ای، در مدل‌های استفاده شده از در نظر گرفتن تنش‌های

با نتایج عددی حاصل از مدل‌های تک‌لایه بررسی شده است. یزدانی و همکاران [۲۹] تنش‌های بین‌لایه‌ای ناشی از رفتار استاتیکی صفحات چندلایه کامپوزیتی را تحلیل کرده‌اند. در این تحلیل، جابه‌جایی‌ها و تنش‌های برون صفحه‌ای به‌عنوان متغیرهای اصلی در نظر گرفته شده‌اند. با توسعه روش مسائل مقدار مرزی، دستگاهی از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول، وابسته به ضخامت لایه‌ها، استخراج شده است. در این مدل، صفحه به‌صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده و تحت بارگذاری عمود بر صفحه قرار دارد و لبه آزاد یک صفحه‌ی ارتوتروپ با روش شو‌تینگ تحلیل شده است.

سئوک و سانگ [۳۰] از یک روش ترکیبی برای بررسی و تعیین توزیع تنش‌های درون صفحه‌ای در پوسته‌های کامپوزیتی استفاده کرده‌اند. افشین و طاهری [۳۱] با استفاده از تئوری لایه‌ای به‌بررسی تنش‌های بین‌لایه‌ای در تیر کامپوزیتی تحت بارگذاری جانبی پرداخته‌اند. نجفی و احمدی [۳۲] توزیع تنش لبه‌ای و تنش‌های سه‌بعدی در یک استوانه کامپوزیتی چرخان را مورد بررسی قرار دادند. احمدی [۳۳، ۳۴] توزیع تنش بین‌لایه‌ای و اثر لبه‌ای در پانل کامپوزیتی تحت بار کششی و ممان خمشی را مورد بررسی قرار داد. همچنین احمدی [۳۵] با استفاده از روش گلرکین به بررسی تنش‌های سه‌بعدی لبه‌ای در پانل کامپوزیتی استوانه شکل تحت بارگذاری عرضی پرداخته است. یک راه‌حل دقیق برای پوسته‌های مرکب و ساندویچی با انحنای دوگانه، که در آن دمای پوسته در راستای ضخامت با استفاده از معادله هدایت حرارتی فوریه محاسبه می‌شود و معادلات حاکم با روش مربعات تفاضلی حل شده‌اند، توسط مونزه و ماتناری [۳۶] منتشر شد. سلطانی و حسینی [۳۷] با استفاده از یک فرمول‌بندی نوین المان محدود پوسته‌ای غیرخطی به بررسی توزیع تنش بین‌لایه‌ای در سراسر ضخامت سازه‌های پوسته‌ای چندلایه کامپوزیتی پرداخته‌اند. دلبرانی‌نژاد و همکاران [۳۸] آغاز جداسازی لبه ناشی از تنش‌های بین‌لایه‌ای را در کامپوزیت‌های لایه‌ای، با استفاده از المان محدود مورد بررسی قرار داده‌اند. کاپل و همکاران [۳۹] تنش‌های لبه آزاد ناشی از بارگذاری رطوبتی-گرمايي مکانیکی را در یک پانل کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد بررسی کرده‌اند. اخیراً عطیا و همکاران [۴۰] با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر که شامل انتگرال نامعین در میدان جابه‌جایی است، به بررسی خمش در کامپوزیت‌های ایزوتروپیک لایه‌ای و پوسته‌های ساندویچی استوانه‌ای پرداخته‌اند.

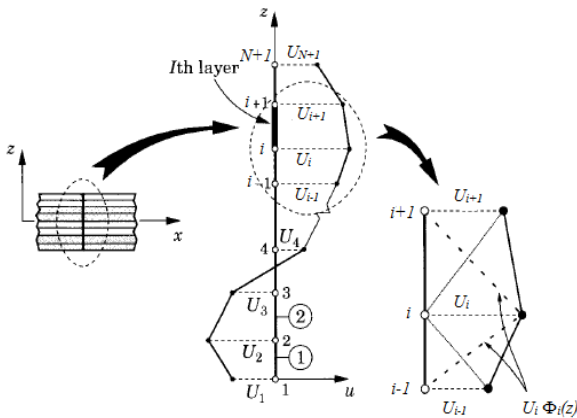
با توجه بر مروری بر ادبیات انجام شده، در این مقاله توزیع تنش‌های سه بعدی در استوانه کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد که تحت بارگذاری شعاعی غیرمقارن قرار دارد محاسبه و بررسی شده است. برای این منظور از تئوری لایه‌ای ردی استفاده شده است. ابتدا تئوری لایه‌ای ردی معرفی اجمالی می‌شود و سپس نحوه استفاده از این تئوری در به‌دست

عددی به‌کار رفته برای برآورد تنش‌های بین‌لایه‌ای بررسی شده است. چو و کیم [۱۷] روش جدیدی برای تحلیل تنش‌های برون صفحه‌ای در پوسته‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری کششی، خمشی، پیچشی و حرارتی ارائه دادند. آن‌ها در این تحلیل از اصل کار مجازی مکمل و روش توسعه‌یافته کانتورویچ استفاده کردند. شو و سولداتوس [۱۸] توزیع تنش را در لایه‌های زاویه‌دار تحت خمش استوانه‌ای و شرایط مرزی مختلف محاسبه کردند.

جباری، سهراب‌پور و اسلامی [۱۹] در سال ۲۰۰۲ به تحلیل تنش‌های مکانیکی و حرارتی در استوانه‌های توخالی با توزیع گرادیانی مواد تحت بار شعاعی مقارن محوری پرداختند. این مطالعه، تحلیلی کلی از تنش‌های حرارتی پایدار یک‌بعدی در چنین سازه‌ای ارائه می‌دهد. در ادامه جباری و همکاران [۲۰]، راه‌حلی عمومی برای تنش‌های حرارتی و مکانیکی در استوانه‌های تابعی تحت بار محوری نامقارن ارائه کرده‌اند. در این مطالعه، توزیع دما تابعی از شعاع در نظر گرفته شده و شرایط مرزی حرارتی و مکانیکی در سطوح داخلی و خارجی لحاظ شده است. برای حل معادلات انتقال حرارت و ناویر، از روش جداسازی متغیرها و سری فوریه استفاده شده است. بی و شنگ [۲۱] به بررسی تنش‌های لبه آزاد در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد تحت بارگذاری شعاعی مقارن را با تئوری سه بعدی الاستیسیته پرداختند. همچنین آن‌ها [۲۲] روشی نوین برای تحلیل سه‌بعدی تنش و تغییر مکان در پوسته‌های استوانه‌ای توخالی مرکب ارائه کرده‌اند. تحلیل انجام شده شامل بارگذاری محوری و شرایط مرزی ساده است و دقت بالاتری نسبت به روش‌های مرسوم دوبعدی یا تئوری‌های کلاسیک پوسته‌ها دارد. حسین و همکاران [۲۳] با استفاده از مدل المان محدود اصلاح شده به بررسی تنش‌های برون صفحه‌ای در پانل ضخیم پرداخته‌اند. وو [۲۴] به مدل‌سازی تنش‌های بین‌لایه‌ای در لامینیت‌های کامپوزیتی با استفاده از روش اجزای محدود پرداخته است. تانو و طبیعی [۲۵] با اضافه کردن ترم‌های تنش عمودی جانبی در تئوری مرتبه اول و مرتبه بالا تنش بین‌لایه‌ای در پوسته کامپوزیتی را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۰ افشین و همکاران [۲۶] به مطالعه اثر لایه‌مرزی در پانل‌های ساندویچی تحت بارگذاری جانبی پرداختند. همچنین در سال ۲۰۱۰ سروستانی و سروستانی [۲۷] جهت محاسبه تنش‌های برون صفحه‌ای در ورق کامپوزیتی با لایه‌گذاری دلخواه از تئوری لایه‌ای استفاده کرده‌اند. کاپور و همکارانش [۲۸] به بررسی تنش‌های بین‌لایه‌ای در صفحات کامپوزیتی و ساندویچی با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند. در این مطالعه، ابعاد المان‌ها به‌گونه‌ای فرمول‌بندی شده‌اند که دو نوع متفاوت از المان‌ها را در دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری به یکدیگر متصل کنند. برخی از نتایج به‌دست آمده با منابع معتبر مقایسه شده و همچنین کارایی مدل ترکیبی

فرض می‌شود که بار گسترده شعاعی $q_0(x, \theta)$ و $q_i(x, \theta)$ به ترتیب به سطح داخلی و خارجی پوسته وارد می‌شود که بار در راستای مثبت شعاع مثبت و باری که به سمت مرکز استوانه است منفی فرض می‌شود. همچنین رابطه بین مختصه محلی z و مختصه شعاعی r به صورت رابطه $r=R+z=R(1+z/R)$ به دست می‌آید که در آن R شعاع متوسط استوانه است. برای پوسته‌های نازک که برای آن‌ها نسبت z/R در مقایسه با ۱ کوچک است می‌توان از این نسبت صرف نظر کرد و $r=R$ در نظر گرفت.

در تئوری لایه‌ای فرض می‌شود که یک چند لایه کامپوزیتی در راستای ضخامت به تعداد لایه فرضی تقسیم شده است که به هر کدام از این لایه‌های فرضی، لایه عددی i یا لایه ریاضی i گفته می‌شود. طبق این فرض اگر تعداد کل لایه‌های عددی در یک چند لایه برابر N لایه باشد، با در نظر گرفتن سطوح بالایی و پایینی چند لایه، در کل به تعداد $N+1$ سطح (سطح مشترک) در چند لایه وجود خواهد داشت که به ترتیب از شماره 1 تا $N+1$ شماره گذاری می‌شود و به آن‌ها سطوح عددی i یا سطوح ریاضی i گفته می‌شود. همان طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود اگر محور z راستای تقسیم را نشان دهد مختصه z سطح عددی i ام ثابت و برابر z_i می‌باشد. لذا جابه‌جایی یک سطح عددی مشخص تابعی از مختصه z نمی‌باشد. در تئوری لایه‌ای ردی تابع جابه‌جایی سطح عددی i ام پوسته کامپوزیتی در سه راستای (x, y, z) به عنوان توابع مجهول از مختصات درون صفحه‌ای در نظر گرفته می‌شود که این توابع مجهول به ترتیب با $U_i(x, y)$ ، $V_i(x, y)$ و $W_i(x, y)$ نشان داده می‌شوند.



شکل ۲- توزیع جابه‌جایی لایه‌های عددی و نحوه شماره گذاری آن‌ها در تئوری لایه‌ای [41].

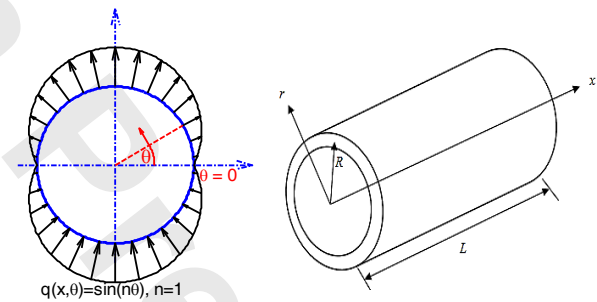
Fig. 2. Displacement distribution of numerical layers and their numbering in layered theory [41].

3. Numerical Surface
4. Mathematical Surface

آوردن معادلات تعادل حاکم بر مساله بیان می‌شود. سپس این تئوری برای مدل‌سازی و فرمول‌بندی الاستیسیته پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد به کار می‌رود. با فرض میدان جابه‌جایی بر اساس فرمول‌بندی تئوری لایه‌ای و استفاده از اصل همیلتون و تعریف منته‌های تنش، معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم بر پوسته استوانه‌ای تحت نیروی شعاعی به دست می‌آید. سپس یک حل تحلیلی برای حل معادلات تعادل حاکم بر مساله به دست آمده و میدان جابه‌جایی و میدان تنش در پوسته استوانه‌ای تحت بار شعاعی داخلی و خارجی غیر متقارن استخراج می‌شود.

فرمول‌بندی مساله

پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی که از تعداد دلخواه لایه‌های کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد ساخته شده است مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که طول استوانه L ، شعاع متوسط آن R و ضخامت آن برابر با h می‌باشد. محور مختصات پوسته استوانه‌ای $r\theta x$ است، که محور r راستای شعاعی استوانه، محور x راستای طولی استوانه و θ مختصه محیطی استوانه می‌باشد. لبه‌های پوسته در $x=0$ و $x=L$ قرار دارند. همچنین فرض می‌شود که محور مختصات محلی z در راستای r بر لایه میانی پوسته استوانه‌ای منطبق می‌باشد به طوری که سطوح داخلی و خارجی پوسته به ترتیب در مختصات $z=h/2$ و $z=-h/2$ قرار دارند و $z=0$ سطح میانی پوسته را نشان می‌دهد. شماتیکی از پوسته کامپوزیتی و بارگذاری شعاعی غیر متقارن در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱- استوانه کامپوزیتی لایه‌ای و محورهای مختصات انتخاب شده و بارگذاری شعاعی.

Fig. 1. Laminated composite cylinder and coordinate system and radial loading.

برای یک نقطه روی استوانه که در مختصات تغییر شکل نیافته در نقطه (x, θ, z) قرار دارد مولفه‌های جابه‌جایی در راستای محوری، محیطی و شعاعی به ترتیب با توابع u, v و w نشان داده می‌شود.

1. Numerical Layer
2. Mathematical Layer

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = U_{k,x} \Phi_k(r) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} = \\ & \frac{1}{R} (V_{k,\theta} \Phi_k(r) + W_k(x, \theta) \Phi_k(r)) \end{aligned} \quad (\text{الف-۳})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial w}{\partial r} = W_k(x, \theta) \Phi'_k(r) \\ \gamma_{xr} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} = \\ & U_k \Phi'_k(r) + W_{k,x}(x, \theta) \Phi_k(r) \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \\ & V_{k,x} \Phi_k(r) + \frac{1}{R} U_{k,\theta} \Phi_k(r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \\ & \frac{1}{R} W_{k,\theta} \Phi_k(r) + V_k(x, \theta) \Phi'_k(r) \\ & - \frac{1}{R} V_k(x, \theta) \Phi_k(r) \end{aligned} \quad (\text{ب-۳})$$

که علامت پرایم بر روی $\Phi(r)$ به معنای مشتق آن نسبت به مختصه شعاعی است. برای استخراج معادلات حرکت برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل که به صورت زیر بیان می‌شود، استفاده شده است [۴۱].

$$\delta U - \delta W_{ext} = 0 \quad (۴)$$

در رابطه (۳) δU تغییرات انرژی کرنشی و δW_{ext} کار نیروهای خارجی می‌باشد و به صورت روابط (۴) و (۵) بیان می‌شود.

$$\delta U = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dx R d\theta dr \quad (۵)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \\ & \int_0^L \int_0^{2\pi} (q_i R_i \delta W_1 + q_o R_o \delta W_{N+1}) d\theta dx = \\ & \int_0^L \int_0^{2\pi} (\delta_{k1} R_i q_i + \delta_{k,N+1} R_o q_o) \delta W_k d\theta dx \end{aligned} \quad (۶)$$

جایگذاری روابط کرنش-جابجایی از روابط (۲) در رابطه (۵)، δU به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_x \delta U_{k,x} \Phi_k(r) + \sigma_\theta (\delta V_{k,\theta} + \delta W_k) \Phi_k(r) \\ & + \sigma_r \delta W_k \Phi'_k(r) + \sigma_{xr} (\delta U_k \Phi'_k(r) + \delta W_{k,x} \Phi_k(r)) \\ & + \sigma_{x\theta} (\delta V_{k,x} \Phi_k(r) + \frac{1}{R} \delta U_{k,\theta} \Phi_k(r)) + \\ & \sigma_{\theta r} (\frac{1}{R} \delta W_{k,\theta} \Phi_k(r) + \delta V_k \Phi'_k(r) - \frac{1}{R} \delta V_k \Phi_k(r))] dx R d\theta dr \end{aligned} \quad (۷)$$

در تئوری لایه‌ای جابه‌جایی در راستای ضخامت گسسته‌سازی می‌شود و میدان جابه‌جایی بر اساس جابه‌جایی سطوح عددی و تابع درونیاب به دست می‌آید. لذا میدان جابه‌جایی در فرمول‌بندی تئوری لایه‌ای به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود: [۴۱].

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_i^{N+1} U_i(x, y) \Phi_i(z) \\ v(x, y, z) &= \sum_i^{N+1} V_i(x, y) \Phi_i(z) \\ w(x, y, z) &= \sum_i^{N+1} W_i(x, y) \Phi_i(z) \end{aligned} \quad (۱)$$

که در رابطه فوق u ، v و w بیانگر مولفه‌های میدان جابه‌جایی سازه در راستای x ، y و z می‌باشند و جمع روی تمام مقادیر سطوح عددی انجام می‌شود. همچنین تابع $\Phi_i(z)$ تابع درونیاب لاگرانژی است که مقدار جابه‌جایی در نقاط داخلی لایه‌های عددی را بر اساس مقدار جابه‌جایی سطوح فوقانی و تحتانی آن لایه عددی بیان می‌کند و به صورت رابطه (۲) بیان می‌شود. میدان جابه‌جایی (۲) دارای پیوستگی از نوع C^0 می‌باشد و این بدین معناست که تنش‌ها پیوسته نمی‌باشند، لذا برای اینکه توزیع تنش‌ها به صورت دقیق ارائه شوند تعداد لایه‌های عددی افزایش داده می‌شود. میدان جابه‌جایی در هر لایه با توجه به جابه‌جایی سطوح عددی بالا و پایین لایه به صورت مستقل درونیابی می‌شود. همچنین $\Phi_i(z)$ تابع درونیاب لاگرانژی مربوط به سطح عددی i است که جابه‌جایی را در راستای ضخامت به طور خطی درونیابی می‌کند و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\Phi_i(z) = \begin{cases} 0 & , z \leq z_{i-1} \\ \Psi_{(i-1)}^2(z) = \frac{z - z_{i-1}}{h_{i-1}} & , z_{i-1} \leq z \leq z_i \\ \Psi_i^1(z) = \frac{z_{i+1} - z}{h_i} & , z_i \leq z \leq z_{i+1} \\ 0 & , z \geq z_{i+1} \end{cases} \quad (۲)$$

که در رابطه (۲) h_i ضخامت لایه عددی i ام، z_i مختصه z سطح عددی i ام می‌باشد و $\Psi_i^j(z)$ که در آن $(j=1,2)$ است تابع درونیاب لاگرانژی محلی خطی در لایه i ام نامیده می‌شوند. مقدار تابع درونیاب لاگرانژی در $\Phi_i(z)$ روی سطح عددی i ام برابر با یک است و به صورت خطی کاهش می‌یابد تا در سطوح عددی پایین‌تر و بالاتر به صفر می‌رسد. برای پوسته کامپوزیتی نیز میدان جابه‌جایی پوسته در جهات طولی x ، محیطی q و شعاعی z پوسته مشابه رابطه (۱) تعریف می‌شود با این تفاوت که به جای مختصه y از مختصه محیطی θ استفاده می‌شود. حال با استفاده از معادلات کرنش جابه‌جایی در مختصات استوانه‌ای، مولفه‌های کرنش در مختصات استوانه‌ای برای پوسته به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{C}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} \quad (11)$$

با جایگذاری ضرایب الاستیک برای لایه ارتوتروپیک در ماتریس سفتی الاستیک $[\bar{C}]^{(k)}$ و در نظر گرفتن مولفه‌های کرنش در رابطه (۱۱)، رابطه ساختاری لایه k ام به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \sigma_{\theta r} \\ \sigma_{xr} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

اندیس‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب نشان دهنده راستای x، θ و z می‌باشد. برای حل، معادلات حاکم بر حسب مختصه‌های جابه‌جایی نوشته می‌شود. برای این کار مولفه‌های کرنش از رابطه (۳) در (۱۲) قرار داده می‌شود و با استفاده از معادلات (۸) و (۹) روابط تعادل بر حسب مختصه‌های جابه‌جایی سطوح عددی به دست می‌آید. به طور مثال رابطه اول از معادلات تعادل (۹) که معادله تعادل در راستای طولی استوانه است به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} & -D_{11}^{kj} U_{j,xx} - D_{16}^{kj} \frac{2}{R} U_{j,x\theta} - \frac{1}{R^2} D_{66}^{kj} U_{j,\theta\theta} + A_{55}^{kj} U_j \\ & - D_{16}^{kj} V_{j,xx} - \frac{1}{R^2} D_{26}^{kj} V_{j,\theta\theta} - \frac{1}{R} (D_{12}^{kj} + D_{66}^{kj}) V_{j,x\theta} \\ & + (-\frac{1}{R} D_{12}^{kj} - B_{13}^{kj} + B_{55}^{jk}) W_{j,x} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

معادلات تعادل در راستای محیطی و شعاعی هم مانند معادله فوق از معادلات (ب-۹) و (ج-۹) بر حسب مختصه‌های جابه‌جایی سطوح عددی به دست می‌آید. این معادلات در مجموع شامل $3(N+1)$ معادله دیفرانسیل پاره‌ای کوپل شده است. حل این معادلات پیچیدگی زیادی دارد. برای حل این معادلات، میدان جابه‌جایی و بار خارجی وارده بر استوانه به صورت سری فوریه از مختصه θ در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \{U(x, \theta)\} &= \{\bar{U}(x)\}_m \sin m\theta \\ \{V(x, \theta)\} &= \{V(x)\}_m \cos m\theta \\ \{W(x, \theta)\} &= \{W(x)\}_m \sin m\theta \end{aligned} \quad (14)$$

سپس با جایگذاری از (۱۴) در (۱۳) معادلات حاکم به یک دسته معادلات دیفرانسیل کوپل عادی تبدیل می‌شود. این معادلات همراه با شرایط مرزی (۱۰) که به بر حسب معادلات جابه‌جایی نوشته شده است انجام می‌شود و پاسخ برای مولفه‌های جابه‌جایی استخراج می‌شود.

برای سهولت در ادامه فرمول‌بندی، متجه‌های تنش در تئوری لایه‌ای در فرمول‌بندی δU به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} (M_x^k, M_\theta^k, M_{x\theta}^k, R_x^k, R_\theta^k) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}, \sigma_{xr}, \sigma_{\theta r}) \Phi_k dr \\ (Q_x^k, Q_\theta^k, N_r^k) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xr}, \sigma_{\theta r}, \sigma_r) \Phi_k' dr \end{aligned} \quad (8)$$

با استفاده از روابط (۸) در رابطه (۷) و اعمال انتگرال‌گیری جز به جز و به کارگیری اصل حداقل انرژی پتانسیل کل که در رابطه (۴) آمده است و صفر قرار دادن ضرایب δU_k ، δV_k و δW_k معادلات تعادل حاکم بر پوسته استوانه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{dM_x^k}{dx} + \frac{dM_{x\theta}^k}{R d\theta} - Q_x^k = 0 \quad (الف-۹)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{dM_\theta^k}{d\theta} + R_\theta^k \right) + \frac{dM_{x\theta}^k}{dx} - Q_\theta^k = 0 \quad (ب-۹)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_x^k}{dx} + \frac{1}{R} \frac{dR_\theta^k}{d\theta} - \left(\frac{1}{R} M_\theta^k + N_r^k \right) \\ + \delta_{k1} q_i(x, \theta) + \delta_{k(N+1)} q_0(x, \theta) = 0 \end{aligned} \quad (ج-۹)$$

که $q_0(x, \theta)$ و $q_i(x, \theta)$ به ترتیب نشان دهنده بار گسترده وارد بر سطح داخل و خارجی استوانه می‌باشد و δ_{ij} تابع دلتای کرونگر می‌باشد که اگر $i=j$ باشد مقدار δ_{ij} برابر ۱ و در غیر این صورت مقدار δ_{ij} برابر صفر خواهد بود. همچنین شرایط مرزی در لبه $x=L$ و $x=0$ به صورت رابطه (۱۰) به دست می‌آید.

$$\begin{cases} M_x^k = 0 \text{ or } \delta U_k = 0 \\ M_{x\theta}^k = 0 \text{ or } \delta V_k = 0 \text{ at } x=0 \text{ or } x=L \\ R_x^k = 0 \text{ or } \delta W_k = 0 \end{cases} \quad (10)$$

برای حل مساله معادلات تعادل بر حسب مولفه‌های جابه‌جایی به دست می‌آید. فرض می‌شود که استوانه کامپوزیتی لایه‌ای از تعدادی لایه کامپوزیتی که هر لایه می‌تواند به صورت دلخواه در راستای طول استوانه (زاویه صفر) و یا در راستای محیط استوانه (زاویه ۹۰) قرار گرفته باشد تشکیل شده است. منظور از زاویه هر لایه زاویه راستای الیاف آن لایه با محور طولی استوانه می‌باشد. لایه ۰ به معنی این است که الیاف در راستای محور استوانه قرار گرفته است و لایه ۹۰ به معنی قرار گرفتن راستای الیاف در راستای محیطی استوانه است. در حالت کلی برای لایه k ام که خواص آن به صورت ارتوتروپیک فرض می‌شود رابطه ساختاری تنش-کرنش در محورهای x، θ و z به صورت زیر نوشته می‌شود که در آن $[\bar{C}]^{(k)}$ ماتریس سفتی لایه k ام در مختصات xqz می‌باشد و بالا نویس k نشان دهنده لایه عددی k ام می‌باشد.

نتایج عددی

دارد. با افزایش تعداد لایه‌های ریاضی دقت نتایج بیشتر می‌شود. لذا در شروع ابتدا همگرایی نتایج عددی با افزایش تعداد لایه‌های ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است. تعداد لایه‌های ریاضی در هر لایه فیزیکی با n_p نشان داده شده است. همگرایی نتایج عددی با افزایش تعداد لایه‌های ریاضی برای تنش عمودی σ_r^* در لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ بررسی شده است.

برای لایه‌گذاری مذکور تعداد کل لایه‌های عددی برابر با $N=4n_p$ می‌باشد. همگرایی تنش عمودی σ_r^* برحسب افزایش تعداد لایه‌های ریاضی در هر لایه فیزیکی در چهار نقطه از پوسته استوانه‌ای در نقاط $(x=L, z=0, \theta=\pi/4)$ ، $(x=L, z=0.25h, \theta=\pi/4)$ ، $(x=L, z=-0.25h, \theta=\pi/4)$ و $(x=0.5L, z=0.25h, \theta=\pi/4)$ در جدول ۲ آمده است.

ملاحظه می‌شود که با افزایش n_p (لایه‌های ریاضی)، تنش عمودی σ_r^* در نقطه $(x=L, z=0, \theta=\pi/4)$ با تعداد لایه ریاضی $n_p=7$ به عدد $21/13$ و در نقطه $(x=0.5L, z=0.25h, \theta=\pi/4)$ و با $n_p=8$ به مقدار $19/88$ همگرا می‌شود، اما با افزایش تعداد لایه‌های ریاضی تنش عمودی σ_r^* در دو نقطه $(x=L, z=-0.25h, \theta=\pi/4)$ و $(x=L, z=0.25h, \theta=\pi/4)$ به طور آرام افزایش یافته است. مشاهده می‌شود مقادیر تنش‌ها در سطحی که بین دو لایه با خواص یکسان قرار دارد و در نواحی دور از لبه با نرخ بالایی همگرا می‌شوند، در حالی که در سطوح بین دو لایه با خواص متفاوت نرخ همگرایی در مقادیر تنش پایین است.

جدول ۲- همگرایی نتایج عددی برای تنش عمودی σ_r^* در چهار نقطه $(x=0.5L, z=0.25h, \theta=\pi/4)$ ، $(x=L, z=0.25h, \theta=\pi/4)$ ، $(x=L, z=-0.25h, \theta=\pi/4)$ و $(x=L, z=0, \theta=\pi/4)$ از استوانه با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup.

Table 2. Convergence study of interlaminar normal stress σ_r^* in four point $(x=0.25L, \theta=\pi/4, z=0.25h)$ ، $(x=L, \theta=\pi/4, z=0.25h)$ ، $(x=L, \theta=\pi/4, z=0)$ ، $(x=L, \theta=\pi/4, z=0)$ in cylinder with $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup.

n_p	$x=0.5L,$ $z=0.25h,$ $\theta=\pi/4$	$x=L,$ $z=0.25h,$ $\theta=\pi/4$	$x=L,$ $z=0,$ $\theta=\pi/4$	$x=L,$ $z=-0.25h,$ $\theta=\pi/4$
2	19.85	21.12	21.15	75.45
3	19.87	-42.96	21.12	83.7
4	19.87	-48.77	21.15	89.74
5	19.87	-52.97	21.13	94.09
6	19.87	-56.27	21.14	97.56
7	19.87	-58.97	21.13	100.4
8	19.88	-61.27	21.13	102.9

تنش‌های بین لایه‌ای در پوسته استوانه‌ای کامل کامپوزیتی تحت نیروی شعاعی که به صورت غیر متقارن محوری (non-axisymmetric) بر استوانه وارد می‌شود، مورد بررسی قرار گرفته و نتایج عددی برای تنش‌های میان لایه‌ای در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی متعامد ارائه شده است. فرض می‌شود که پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری شعاعی در سطح خارجی (یا داخلی) استوانه قرار گرفته است به گونه‌ای که توزیع آن در راستای طول استوانه یکنواخت بوده و در راستای محیطی استوانه به صورت سینوسی تغییر می‌کند. توزیع بار شعاعی وارد شده بر استوانه به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$q(x, \theta) = q_0 \sin(m\theta) \quad (15)$$

که q_0 دامنه نیروی گسترده و m یک عدد طبیعی است که نشان دهنده تغییرات بار نسبت به مختصه محیطی است. همچنین تنش‌ها و جابجایی‌های بی‌بعد به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} (\sigma_\theta^*, \sigma_x^*) &= (\sigma_\theta, \sigma_x) / (q_0 S^2) \\ \sigma_{\theta r}^* &= \sigma_{\theta r} / (q_0 S), \\ \sigma_{xr}^* &= \sigma_{xr} / (q_0 S), \\ \sigma_r^* &= \sigma_r / q_0, \\ u^* &= 10E_2 u / q_0 h S^3 \\ v^* &= 10E_2 v / q_0 h S^3, \\ w^* &= 10E_2 w / q_0 h S^4 \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن R شعاع متوسط استوانه، h ضخامت استوانه و L طول استوانه است و $S=R/h$ نسبت شعاع متوسط استوانه به ضخامت آن می‌باشد. پارامترهای هندسی استوانه در کلیه نتایج این مقاله برابر $h=1\text{mm}$ ، $L=4h$ و $R=50h$ در نظر گرفته شده است. همچنین خواص مکانیکی لایه‌های کامپوزیت به صورت جدول ۱ انتخاب شده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی لایه‌های کامپوزیت کربن-اپوکسی [۳۵].

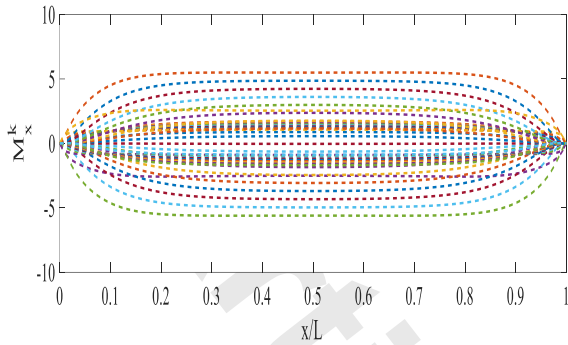
Table 1. Mechanical properties of Carbon -Epoxy laminate [35].

E_1 (Gpa)	$E_2=E_3$ (Gpa)	$G_{12}=G_{13}$ (Gpa)	G_{23} (Gpa)	$\nu_{12}=\nu_{13}$	ν_{23}
136	9.8	4.7	4.26	0.28	0.15

بررسی همگرایی نتایج عددی

دقت نتایج به دست آمده از تئوری لایه‌ای به تعداد لایه‌های ریاضی بستگی

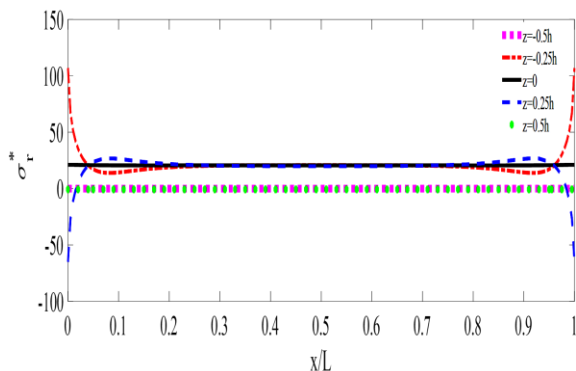
در شکل ۳ توزیع کمیت $M^k(x)$ که در رابطه (۸) تعریف شده است برای سطوح ریاضی مختلف آمده است. برای شرایط مرزی آزاد این کمیت باید در مرزهای $x=0$ و $x=L$ برابر با صفر باشد. در شکل ۳ شرایط مرزی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است مقدار این کمیت در مرزها به صورت کاملاً دقیق شرایط مرزی لبه را ارضا می‌نمایند.



شکل ۳- توزیع $M^k(x)$ در طول استوانه با شرط مرزی دوسر آزاد در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ، $(\theta=\pi/4$ و $m=2)$.

Fig. 3. Distribution of $M^k(x)$ along the length of $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ composite cylinder with free-free edge ($m=2$ and $\theta=\pi$).

در شکل ۴ توزیع تنش عمودی σ_r^* در راستای طول پوسته استوانه کامپوزیتی در ضخامت‌های مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است تنش در نواحی دور از لبه ثابت بوده، اما با نزدیک شدن به لبه آزاد پوسته استوانه‌ای، تنش عمودی σ_r^* به صورت ناگهانی تغییر کرده و در خود لبه آزاد به مقدار ثابتی رسیده است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد به این پدیده، پدیده لایه مرزی گفته می‌شود که با مدل‌سازی با تئوری کلاسیک ورق‌ها قابل پیش‌بینی نیست.



شکل ۴- توزیع تنش عمودی σ_r^* در راستای طول پوسته استوانه کامپوزیتی با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ، $(\theta=\pi/4$ و $m=2)$.

Fig. 4. Distribution of interlaminar normal stress σ_r^* along the axial direction of a composite cylindrical shell with $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layout ($m=2$ and $\theta=\pi$).

9	19.88	-63.26	21.13	105
10	19.88	-65.02	21.13	106.8
11	19.88	-66.6	21.13	108.5
12	19.88	-66.6	21.13	110.1
13	19.88	-69.34	21.13	111.5
14	19.88	-70.54	21.13	112.8

صحه‌گذاری نتایج عددی

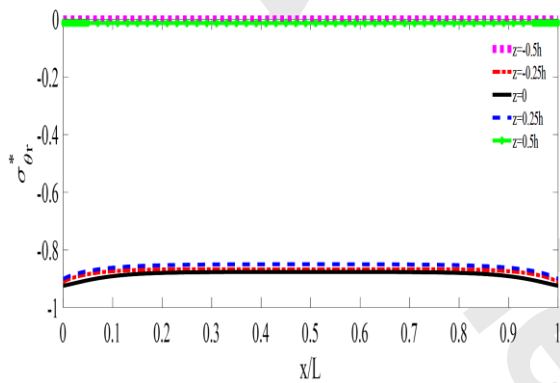
برای بررسی دقت و صحت نتایج عددی حاصل از این مقاله، نتایج عددی در حالت‌هایی که نتایج مشابه در منابع موجود است، مقایسه شده است. با توجه به بررسی‌های انجام شده حل‌های ارائه شده در منابع برای بارگذاری مشابه برای استوانه با لایه‌گذاری متعامد و شرایط مرزی ساده-ساده در دو لبه استوانه موجود می‌باشد که توسط وارادان و بهاسکار [۱۲] ارائه شده است. آن‌ها در مقاله خود پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد را که دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های استوانه است به روش تحلیلی حل کردند. مقادیر مربوط به تنش‌های مختلف در جدول ۳ آمده است و برای مقادیر مختلف نسبت R/h با مقادیر ارائه شده در [۱۲] مقایسه شده است. انطباق خوبی بین نتایج ملاحظه می‌شود که نشان دهنده صحت حل معادلات و دقت بالای روش ارائه شده برای پیش‌بینی تنش‌های درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای می‌باشد. قابل ذکر است در نتایج ارائه شده در جدول ۳ تعداد لایه‌های عددی در تئوری لایه‌ای برابر با $N=60$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۳- مقایسه نتایج برای استوانه کامپوزیتی $[90^\circ]$ با مرجع [۱۲] ($L=4R$ ، $\theta=\pi/4$ ، $m=4$ ، $h=1$)

Table 3. Comparison of the results for a $[90^\circ]$ composite cylinder ($L=4R$, $m=4$, $\theta=\pi/4$, $h=1$) with reference [12].

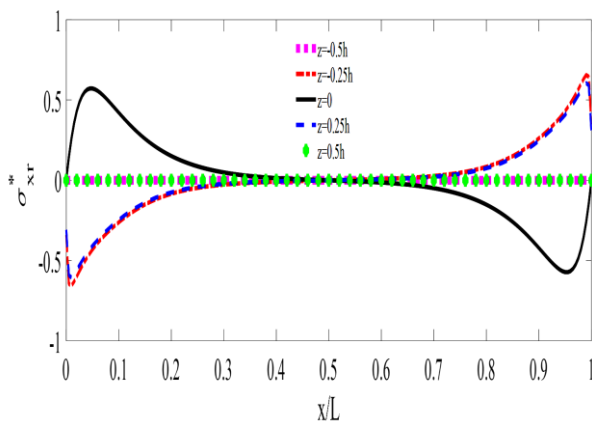
S=R/h		σ_θ^*	$\sigma_{\theta x}^*$	σ_{rx}^*	$\sigma_{r\theta}^*$
		$z=\pm h/2$ $\theta=\pi/4$	$z=\pm h/2$ $\theta=\pi$	$z=0$, $\theta=\pi/4$	$z=0$, $\theta=\pi$
50	[12]	-3.979 3.902	-0.0383 0.0243	0.0404	-3.919
	Present N=60	-3.9785 3.9014	0.0383 0.0243	0.0413	-3.9189
100	[12]	-3.876 3.843	-0.0447 0.0161	0.0393	-3.859
	Present N=60	-3.8760 3.8426	-0.0447 0.0161	0.0402	-3.8585
500	[12]	-2.293 2.306	-0.0611 -0.0249	0.0234	-2.303
	Present N=60	-2.283 2.2900	-0.0608 -0.0248	0.0238	-2.294

تغییرات شدید تنش رخ می‌دهد ناحیه مرزی نامیده می‌شود، به همین علت معمولاً ناحیه لایه مرزی تنش به اندازه ضخامت پوسته در نظر گرفته می‌شود. تنش ابتدا در سطح بین لایه‌های $z=-0.025h$ منفی بوده و با افزایش فاصله از لایه رفته-رفته در نواحی دور از لایه به صفر می‌رسد و در نزدیکی لایه سمت دیگر دوباره با علامت مثبت افزایش می‌یابد و نهایتاً در $x=0.99L$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد، سپس کاهش یافته و به مقدار صفر می‌رسد.



شکل ۶- توزیع تنش برشی میان لایه‌های $\sigma_{\theta r}^*$ در راستای طول استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($m=1/2$ و $\theta=\pi$).

Fig. 6. Distribution of interlaminar shear stress $\sigma_{\theta r}^*$ along the axial direction of a composite cylindrical shell with $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup ($m=1/2$ and $\theta=\pi$).

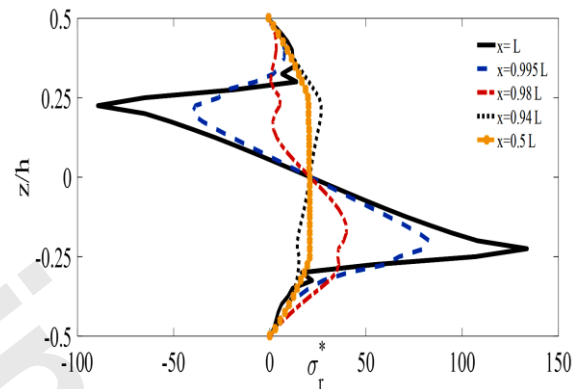


شکل ۷- توزیع تنش برشی میان لایه‌های σ_{xr}^* در راستای طول استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($m=2$ و $\theta=\pi/4$).

Fig. 7. Distribution of interlaminar shear stress σ_{xr}^* along the axial direction of a composite cylindrical shell with $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup ($m=2$ and $\theta=\pi/4$).

شکل ۸ توزیع تنش برشی میان لایه‌های σ_{xr}^* نسبت به تغییرات مختصه راستای ضخامت (z) استوانه تحت فشار خارجی در فاصله‌های

شکل ۵ توزیع تنش عمودی σ_r^* نسبت به تغییرات مختصه راستای ضخامت (z) پوسته استوانه کامپوزیتی در فاصله‌های مختلف از لایه استوانه نشان می‌دهد. $x=L$ لایه سمت راست و $x=0$ لایه سمت چپ استوانه را نشان می‌دهد و $x=0.5L$ وسط استوانه است و $x=0.995L$ و $x=0.98L$ نزدیکی لایه سمت راست را نشان می‌دهد. حداکثر مقدار تنش شعاعی در $x=L$ رخ می‌دهد و مقدار آن برابر $133/8$ MPa می‌باشد. در نواحی دورتر از لایه، مقدار تنش عمودی کاهش می‌یابد و به صفر نزدیک می‌شود. مشاهده می‌شود در مرز بین لایه ۹۰ و ۰ داخلی تنش به صورت کششی بوده و در ادامه در مرز بین لایه ۰ و ۹۰ مقدار تنش شعاعی σ_r^* به حالت فشاری تبدیل می‌شود.



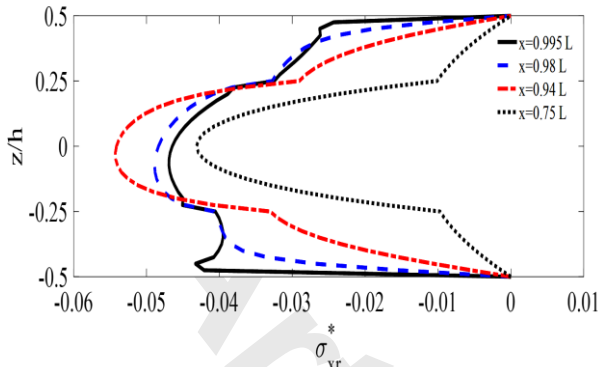
شکل ۵- توزیع تنش عمودی σ_r^* در راستای ضخامت پوسته استوانه کامپوزیتی با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($m=2$ و $\theta=\pi/4$).

Fig. 5. Through-thickness distribution of the normal stress σ_r^* in a composite cylindrical shell with $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup ($m=2$ and $\theta=\pi/4$).

شکل ۶ توزیع تنش برشی میان لایه‌های $\sigma_{\theta r}^*$ نسبت به تغییرات مختصه طول، x، پوسته استوانه‌ای در ضخامت‌های مختلف می‌باشد. مقدار این تنش در زاویه $\sigma_{\theta r}^*$ از استوانه که مقدار بار خارجی حداکثر است، محاسبه شده است. با توجه به شکل، همانگونه که انتظار می‌رود مقدار این تنش در سطح داخلی و خارجی صفر می‌باشد. مقدار تنش $\sigma_{\theta r}^*$ در سطوح $z=0$ ، $z=0.25h$ و $z=-0.25h$ در نواحی دور از لایه ثابت بوده و در نزدیکی لایه مقدار کمی تغییر پیدا می‌کند، لذا تنش برشی $\sigma_{\theta r}^*$ در مقایسه با سایر تنش‌ها بسیار کوچک بوده و تاثیری در جدایش لایه‌ها نخواهد داشت.

شکل ۷ توزیع تنش برشی میان لایه‌های برشی σ_{xr}^* نسبت به تغییرات مختصه طول (x) پوسته استوانه‌ای تحت فشار خارجی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود مقدار این تنش در لایه آزاد صفر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییرات تنش در فاصله‌ای به اندازه ضخامت لایه پوسته استوانه‌ای ایجاد می‌شود. این ناحیه که در آن

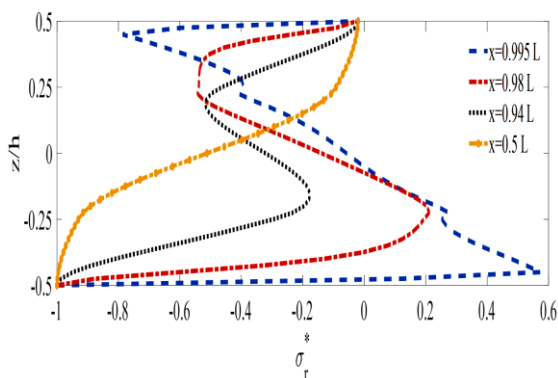
فشار داخلی قرار گرفته است در فواصل مختلف تا لبه برای شرایط مرزی گیردار-گیردار نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود تنش‌ها از ابتدا تا انتها منفی است و مقدار تنش در سطح داخلی و بیرونی به خوبی ارضا و صفر شده است. همچنین بیشترین مقدار تنش در طول $x=0.94L$ رخ داده است.



شکل ۱۰- توزیع تنش برشی بین لایه‌های σ_{xr}^* در راستای ضخامت پوسته استوانه‌ای با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($\theta=\pi$ و $m=1/2$).

Fig. 10. Through-thickness distribution of the shear stress σ_{xr}^* in a composite cylindrical shell with $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup ($m=1/2$ and $\theta=\pi$).

شکل ۱۱ توزیع تنش بین لایه‌های عمودی σ_r^* نسبت به تغییرات مختصه راستای ضخامت (z) را در پوسته استوانه‌ای با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ در فاصله‌های مختلف از لبه نشان می‌دهد. مقدار تنش در سطح‌های بالایی $z=0.5h$ برابر با $(\sigma_r^*=0)$ و در سطح پایینی $(\sigma_r^*=1)$ به خوبی ارضا شده که نشان می‌دهد در سطح $z=-0.5h$ مقدار تنش برابر با مقدار فشار داخلی وارد بر استوانه می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود بیشترین مقدار تنش عمودی σ_r^* در نزدیکی لبه در $x=0.995L$ می‌باشد.

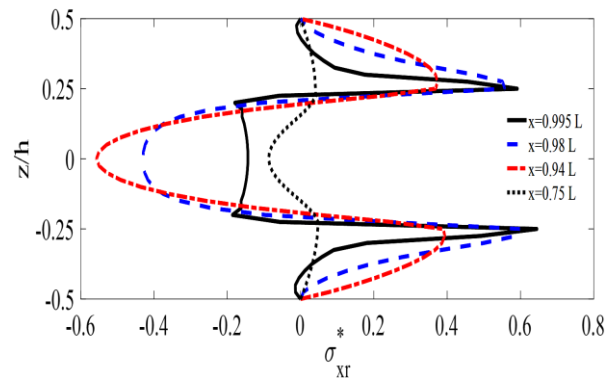


شکل ۱۱- توزیع تنش عمودی σ_r^* در راستای ضخامت پوسته استوانه‌ای با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($\theta=\pi$ و $m=1/2$).

Fig. 11. Through-thickness distribution of the normal stress σ_r^* in the composite cylindrical shell with $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup ($m=1/2$ and $\theta=\pi$).

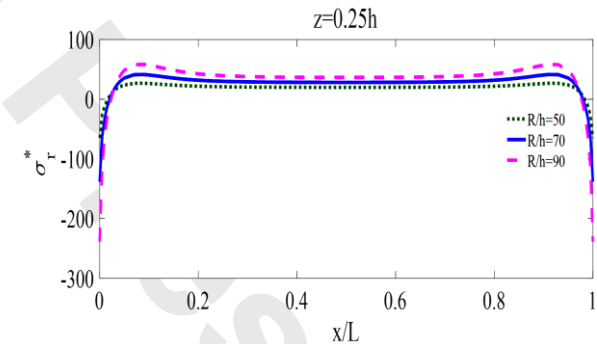
مختلف از لبه را نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد تنش برشی پیش‌بینی شده توسط تئوری لایه‌های شرایط مرزی را در سطوح داخلی و خارجی پوسته ($z=\pm 0.5h$) به خوبی ارضا کرده و تنش در سطح داخلی و بیرونی صفر می‌شود. مشاهده می‌شود حداکثر تنش برشی در $x=0.94L$ در $z=0$ رخ داده و بعد از آن با نزدیک‌تر شدن به لبه پوسته استوانه‌ای، تنش برشی کمتر شده و به مقدار صفر می‌رسد.

همچنین توزیع تنش σ_r^* نسبت به تغییرات مختصه طول (x) استوانه در سطح $z=0.25h$ برای مقادیر مختلف شعاع پوسته در شکل ۹ نشان داده شده است و اثرات تغییر شعاع مشاهده می‌شود.



شکل ۸- توزیع تنش برشی بین لایه‌های σ_{xr}^* در راستای ضخامت پوسته استوانه‌ای با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($\theta=\pi/4$ و $m=2$).

Fig. 8. Through-thickness distribution of the shear stress σ_{xr}^* in a composite cylindrical shell with a $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup ($m=2$ and $\theta=\pi/4$).



شکل ۹- اثر شعاع بر توزیع تنش عمودی بین لایه‌های σ_r^* در پوسته با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($\theta=\pi/4$ و $m=2$).

Fig. 9. Effect of radius on the distribution of interlaminar normal stress σ_r^* in a shell with $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup.

در این قسمت نتایج عددی برای تکیه‌گاه گیردار آمده است. شکل ۱۰ توزیع تنش برشی بین لایه‌های σ_{xr}^* نسبت به تغییرات مختصه راستای ضخامت (z) را در پوسته استوانه‌ای با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ که تحت

تئوری‌ها قادر به پیش‌بینی توزیع تنش‌های بین لایه‌ای نیستند و لذا از تئوری لایه‌ای برای پیش‌بینی این تنش‌ها استفاده شده است. با توجه به نتایج عددی به دست آمده مشاهده شد که تئوری لایه‌ای ارائه شده بر خلاف تئوری کلاسیک توانایی بررسی تنش‌های بین لایه‌ای در سطوح مشترک لایه‌های پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی را دارد.

شرایط مرزی آزاد-آزاد و گیردار-گیردار برای پوسته استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است و مشاهده شده است که تنش‌های بین لایه‌ای در شرایط مرزی گیردار کمتر از تنش‌های بین لایه‌ای در شرایط مرزی آزاد است. همچنین از نتایج عددی ملاحظه می‌شود تئوری لایه‌ای با دقت بالایی شرایط مرزی را ارضا می‌نماید.

همچنین تاثیر پارامتر هندسی R بر روی تنش عمودی بین لایه‌ای σ_r^* مورد بررسی قرار گرفته است و چنین مشاهده می‌شود که با افزایش شعاع پوسته استوانه‌ای تنش عمودی بین لایه‌ای σ_r^* کاهش پیدا می‌کند.

میزان تغییرات تنش‌های بین لایه‌ای در لایه مرزی (در نزدیکی لبه) بسیار شدید بوده و در نقاط دور از لبه به مقدار ثابتی میل می‌کند. در شرایط مرزی تکیه‌گاه آزاد، تنش عمودی بین لایه‌ای σ_r^* و تنش برشی بین لایه‌ای σ_{xr}^* در لبه یا نزدیکی آن دارای مقدار بوده و در جدایش لایه‌های پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تاثیر گذار هستند، اما تنش برشی بین لایه‌ای $\sigma_{\theta r}^*$ تقریباً برابر صفر و یا در مقایسه با سایر تنش‌های بین لایه‌ای دارای مقدار کمتری بوده و لذا به همین دلیل تاثیر در ورقه شدن یا جدایش لایه‌ها ندارد.

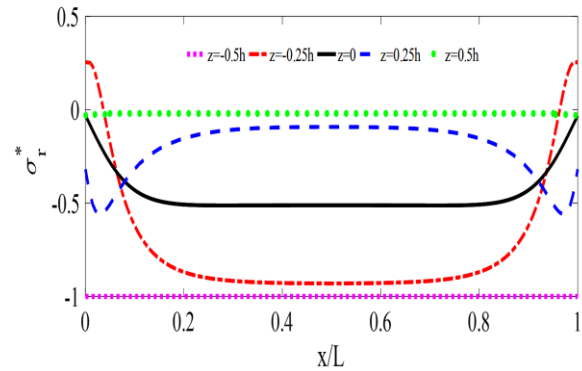
تعارض منافع

هیچگونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

مراجع

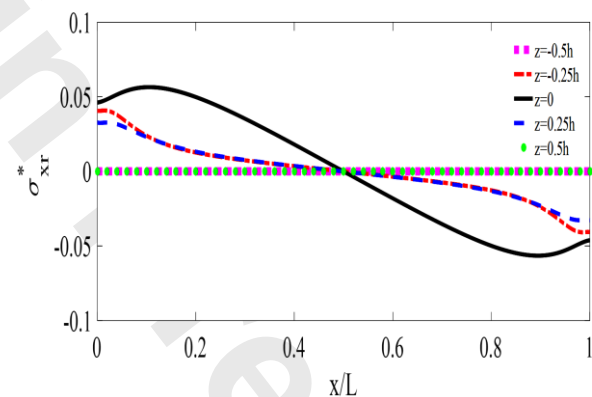
- [1] T. Hayashi, "Analytical study of interlaminar shear stresses in laminated composite plate," *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, pp. 279-284, 1968.
- [2] A. H. Puppo and H. A. Evensen, "Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress," *Journal of Composite Materials*, vol. 4, no. 2, pp. 204-220, 1970, <https://doi.org/10.1177/002199837000400206>.
- [3] R. B. Pipes, "Moire analysis of the interlaminar shear edge effect in laminated composites," *Journal of Composite Materials*, vol. 5, no. 2, pp. 255-259, 1971, <https://doi.org/10.1177/002199837100500211>.
- [4] R. B. Pipes and N. J. Pagano, "Interlaminar stresses in composite laminates—an approximate elasticity

در ادامه دو شکل ۱۲ و ۱۳ برای درک بهتر از توزیع تنش‌های برون صفحه‌ای در حالت شرایط مرزی گیردار آورده شده است که توزیع تنش را نسبت به تغییر مختصه طول (x) استوانه نشان می‌دهد



شکل ۱۲- توزیع تنش عمودی σ_r^* در راستای طول پوسته استوانه‌ای با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($\theta=\pi$ و $m=1/2$).

Fig. 12. Distribution of interlaminar normal stress σ_r^* along the axial direction of the cylindrical shell with $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup ($m=1/2$, $\theta=\pi$).



شکل ۱۳- توزیع تنش عمودی σ_{xr}^* در راستای طول پوسته استوانه‌ای با لایه‌گذاری $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($\theta=\pi$ و $m=1/2$).

Fig. 13. Distribution of axial normal stress σ_{xr}^* along the length of a cylindrical shell with $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ layup ($m=1/2$, $\theta=\pi$).

نتیجه گیری

با توجه به کاربردهای عمده مواد کامپوزیتی لایه‌ای و از جمله استوانه‌های کامپوزیتی در صنایع مختلف مربوط به هوافضا، در این مقاله یک مدل برای بررسی توزیع سه بعدی تنش در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری شعاعی قرار دارد ارائه شده است. در تئوری‌های کلاسیک پوسته‌ها، به طور عمده تنش‌های بین لایه‌ای در نظر گرفته نمی‌شود یا فرم بسیار ساده‌ای برای توزیع این تنش‌ها در نظر گرفته می‌شود لذا این

- [16] T. Kant and K. Swaminathan, "Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites—a selective review and survey of current developments," *Composite Structures*, vol. 49, no. 1, pp. 65–75, 2000, [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00126-9](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00126-9).
- [17] M. Cho and H. S. Kim, "Iterative free-edge stress analysis of composite laminates under extension, bending, twisting and thermal loadings," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, no. 3, pp. 435–459, 2000, [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00014-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00014-1).
- [18] X. P. Shu and K. P. Soldatos, "Cylindrical bending of angle-ply laminates subjected to different sets of edge boundary conditions," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, no. 31, pp. 4289–4307, 2000, [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00144-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00144-4).
- [19] M. Jabbari, S. Sohrabpour, and M. Eslami, "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 79, no. 7, pp. 493–497, 2002, [https://doi.org/10.1016/S0308-0161\(02\)00043-1](https://doi.org/10.1016/S0308-0161(02)00043-1).
- [20] M. Jabbari, S. Sohrabpour, and M. R. Eslami, "General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 70, no. 1, pp. 111–118, 2003, <https://doi.org/10.1115/1.1509484>.
- [21] J. Q. Ye and H. Y. Sheng, "Free-edge effect in cross-ply laminated hollow cylinders subjected to axisymmetric transverse loads," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 45, no. 8, pp. 1309–1326, 2003, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2003.09.017>.
- [22] H. Y. Sheng and J. Q. Ye, "A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, no. 22–24, pp. 2441–2459, 2003, [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00265-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00265-2).
- [23] S. J. Hossain, P. K. Sinha, and A. H. Sheikh, "A finite element formulation for the analysis of laminated composite shells," *Computers & Structures*, vol. 82, no. 20–21, pp. 1623–1638, 2004, <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.05.004>.
- [24] H. Wu and X. Yan, "Interlaminar stress modeling of composite laminates with finite element method," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 24, no. 3, pp. 235–258, 2005, <https://doi.org/10.1177/0731684405043553>.
- [25] R. Tanov and A. Tabiei, "Adding transverse normal stresses to layered shell finite elements for the analysis of composite structures," *Composite Structures*, vol. 76, no. 4, pp. 338–344, 2006, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.05.007>.
- solution," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 41, no. 3, pp. 668–672, 1974, <https://doi.org/10.1115/1.3423368>.
- [5] S. Tang and A. Levy, "A boundary layer theory-part II: extension of laminated finite strip," *Journal of Composite Materials*, vol. 9, no. 1, pp. 42–52, 1975, <https://doi.org/10.1177/002199837500900105>.
- [6] P. W. Hsu and C. T. Herakovich, "Edge effects in angle-ply composite laminates," *Journal of Composite Materials*, vol. 11, no. 4, pp. 422–428, 1977, <https://doi.org/10.1177/002199837701100405>.
- [7] J. T. S. Wang and J. N. Dickson, "Interlaminar stresses in symmetric composite laminates," *Journal of Composite Materials*, vol. 12, no. 4, pp. 390–402, 1978, <https://doi.org/10.1177/002199837801200404>.
- [8] J. G. Ren, "Exact solutions for laminated cylindrical shells in cylindrical bending," *Composites Science and Technology*, vol. 29, no. 3, pp. 169–187, 1987, [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(87\)90069-8](https://doi.org/10.1016/0266-3538(87)90069-8).
- [9] C. Kassapoglou and P. A. Lagace, "Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates," *Journal of Composite Materials*, vol. 21, no. 4, pp. 292–308, 1987, <https://doi.org/10.1177/002199838702100401>.
- [10] C.-C. Lin, C. Y. Hsu, and C. C. Ko, "Interlaminar stresses in general laminates with straight free edges," *AIAA Journal*, vol. 33, no. 8, pp. 1471–1476, 1995, <https://doi.org/10.2514/3.12569>.
- [11] R. A. Chaudhuri, "On the prediction of interlaminar shear stresses in a thick laminated general shell," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 26, no. 5–6, pp. 499–510, 1990, [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90024-P](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90024-P).
- [12] T. K. Varadan and K. Bhaskar, "Bending of laminated orthotropic cylindrical shells—An elasticity approach," *Composite Structures*, vol. 17, no. 2, pp. 141–156, 1991, [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(91\)90067-9](https://doi.org/10.1016/0263-8223(91)90067-9).
- [13] W. L. Yin, "Free-edge effects in anisotropic laminates under extension, bending, and twisting, part II: eigenfunction analysis and the results for symmetric laminates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 61, no. 2, pp. 416–421, 1994, <https://doi.org/10.1115/1.2901460>.
- [14] J. Ye and K. Soldatos, "Three-dimensional stress analysis of orthotropic and cross-ply laminated hollow cylinders and cylindrical panels," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 117, no. 3–4, pp. 331–351, 1994, [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(94\)90121-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90121-X).
- [15] J. M. Starbuck, "Stress analysis of laminated composite cylinders under non-axisymmetric loading," in *31st International SAMPE Technical Conference*, McCormick Place, Chicago, Illinois, 1999, pp. 604–615.

- [34] I. Ahmadi, "Edge stresses analysis in laminated thick sandwich cylinder subjected to distributed hygrothermal loading," *Journal of Sandwich Structures & Materials*, vol. 20, no. 4, pp. 425–461, 2018, <https://doi.org/10.1177/1099636216657681>.
- [35] I. Ahmadi, "A three-dimensional formulation for Levy-type transversely loaded cross-ply shell panels," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 167, 2020, Art. no. 105224, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105224>.
- [36] J. C. Monge and J. L. Mantari, "Exact solution of thermo-mechanical analysis of laminated composite and sandwich doubly-curved shell," *Composite Structures*, vol. 245, 2020, Art. no. 112323, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112323>.
- [37] Z. Soltani and S. A. Hosseini Kordkheili, "Interlaminar stress analysis of composite shell structures using a geometrically nonlinear layer-wise shell finite element," *Composite Structures*, vol. 257, 2021, Art. no. 113074, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113074>.
- [38] A. Delbariani Nejad, A. Farrokhabadi, and M. Fotouhi, "Finite element reliability analysis of edge delamination onset due to interlaminar stresses in composite laminates," *Composite Structures*, vol. 288, 2022, Art. no. 115410, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115410>.
- [39] A. Kappel, S. Dillen, and C. Mittelstedt, "Hygrothermomechanical analysis of the free-edge stress fields in cylindrical cross-ply laminated shells," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 30, no. 4, pp. 676–693, 2023, <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2022256>.
- [40] A. Attia *et al.*, "Bending analysis of laminated composite and sandwich cylindrical shells using analytical method and ansys calculations," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 60, no. 1, pp. 33–48, 2024, <https://doi.org/10.1007/s11029-024-10173-7>.
- [41] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd ed. CRC press, 2003.
- [26] M. Afshin, M. Sadighi, and M. Shakeri, "Free-edge effects in a cylindrical sandwich panel with a flexible core and laminated composite face sheets," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 46, no. 5, pp. 539–554, 2010, <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9170-x>.
- [27] H. Yazdani Sarvestani and M. Yazdani Sarvestani, "Interlaminar stress analysis of general composite laminates," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, no. 11, pp. 958–967, 2011, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.07.007>.
- [28] H. Kapoor, R. K. Kapania, and S. R. Soni, "Interlaminar stress calculation in composite and sandwich plates in NURBS Isogeometric finite element analysis," *Composite Structures*, vol. 106, pp. 537–548, 2013, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.05.028>.
- [29] M. Yazdani and M. Rezghi, M. R. Khalili Lanji, and B. Moomivand, "Analysis of free edge stresses in a cross-ply composite plate by applying shooting method," *Journal of Modares Mechanical Engineering*, vol. 13, no. 9, pp. 1–11, 2013, (in Persian).
- [30] J. S. Ahn and K. S. Woo, "Interlaminar stress distribution of laminated composites using the mixed-dimensional transition element," *Journal of Composite Materials*, vol. 48, no. 1, pp. 3–20, 2014, <https://doi.org/10.1177/0021998312467551>.
- [31] M. Afshin and F. Taheri-Behrooz, "Interlaminar stresses of laminated composite beams resting on elastic foundation subjected to transverse loading," *Computational Materials Science*, vol. 96, pp. 439–447, 2015, <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.06.027>.
- [32] I. Ahmadi and M. Najafi, "Three-dimensional stresses analysis in rotating thin laminated composite cylindrical shells," *Steel and Composite Structures, an International Journal*, vol. 22, no. 5, pp. 1193–1214, 2016, <https://doi.org/10.12989/scs.2016.22.5.1193>.
- [33] I. Ahmadi, "Edge stresses analysis in thick composite panels subjected to axial loading using layerwise formulation," *Structural Engineering and Mechanics an International Journal*, vol. 57, no. 4, pp. 733–762, 2016, <https://doi.org/10.12989/sem.2016.57.4.733>.