

Original Research Paper

Stability Analysis and Nonlinear Modeling of Coupled Slosh-Tank Dynamics: Analytical Equivalent Pendulum Approach

Milad Azimi* 

Aerospace Research Institute, Ministry of Science, Research and Technology, Tehran, Iran

ARTICLE INFO**Article History:**

Received 11 January 2022

Revised 07 March 2022

Accepted 09 March 2022

Available Online 15 April 2022

Keywords:

Sloshing

Stability analysis

Pendulum equivalent model

Homotopy perturbation method


Runge-Kutta

ABSTRACT

This paper addresses the semi-analytical modeling and stability analysis of coupled slosh-tank dynamics within a multi-body system framework using the homotopy perturbation method (HPM). The sloshing motion of the liquid inside the tank is represented using an equivalent pendulum model, which allows for a more accurate depiction of the dynamics involved. Nonlinear equations of motion are derived using the Lagrangian approach to account for lateral and longitudinal excitations, explicitly focusing on compressive oscillations. Our model investigates the influence of critical parameters, including viscous damping, amplitude, and excitation frequency. These parameters are examined at two specific points, one within and one outside the stability regions, to understand their effects on the overall system behavior. The study demonstrates that viscous damping is particularly significant in moving points from unstable to stable regions compared to other principal parameters. Simulations are conducted to visualize stability phenomena through stability diagrams, phase portraits, and time histories of sloshing amplitude. The results obtained using HPM are compared to those from the numerical Runge-Kutta method, validating the analytical approach. This comparison highlights the effectiveness of HPM in accurately capturing the dynamics and stability characteristics of coupled slosh-tank systems, offering valuable insights into the design and control of such systems.

*Corresponding Author's E-mail: azimi.m@ari.ac.ir**How to Cite this Article:**M. Azimi, "Stability analysis and nonlinear modeling of coupled slosh-tank dynamics: Analytical equivalent pendulum approach," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 17, No. 2, pp. 41-54, 2024, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jsst.2022.1387>.**COPYRIGHTS**© 2024 by the authors. Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

تحلیل پایداری و مدل سازی غیر خطی دینامیک کوپل تلاطم - مخزن: حل تحلیلی مدل آونگ معادل

میلاذ عظیمی* 

استادیار، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

چکیده

این مقاله به مدل سازی نیمه تحلیلی دینامیک کوپل تلاطم مخزن و تحلیل پایداری سیستم در قالب یک سیستم چندجسمی پرداخته است. حرکت سیال درون مخزن با استفاده از مدل آونگ معادل مدل سازی شده است. معادلات غیرخطی حرکت مخزن که در معرض تحریکات جانبی و طولی قرار گرفته (نوسانات فشاری) با استفاده از روش لاگرانژین استخراج شده است. در این مدل اثر پارامترهای مؤثر بر تلاطم (میرایی، فرکانس و دامنه تحریک) به ازای دو مختصات در داخل و خارج از ناحیه پایداری برای تحلیل رفتار سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است. شبیه سازی های انجام شده در قالب نمودارهای پایداری، دیاگرام فازی و دامنه نوسانات سیال با استفاده از روش نیمه تحلیلی هوموتوبی پرتوربیشن و روش عددی رانگ-کوتا ارائه شده است. نشان داده شده است که میرایی لزج در مقایسه با سایر پارامترهای مؤثر، مختصات واقع در منطقه ناپایدار را نزدیک به نواحی پایدار می کند. نتایج در قالب یک مطالعه مقایسه ای، رویکردی مؤثر برای بررسی رفتار غیرخطی دینامیک تلاطم سیال درون مخازن و میزان اثر پارامترهای مؤثر بر پایداری سیستم خواهد بود.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۲۱ دی ۱۴۰۰
بازنگری ۱۶ اسفند ۱۴۰۰
پذیرش ۱۸ اسفند ۱۴۰۰
اولین انتشار ۲۶ فروردین ۱۴۰۱

واژه های کلیدی:

ترازیابی اولیه
سیستم های ناوبری
صفحه پایدار
تخمین
فیدبک حالت

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: azimi.m@ari.ac.ir

How to Cite this Article:

M. Azimi, "Stability analysis and nonlinear modeling of coupled slosh-tank dynamics: Analytical equivalent pendulum approach," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 17, No. 2, pp. 41-54, 2024, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jsst.2022.1387>.



COPYRIGHTS

© 2024 by the authors. Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



علائم و اختصارات

α	زاویه انحراف آونگ از محور طولی مخزن
C_α	ضریب اتلاف
l_p	طول آونگ از محور طولی مخزن
I_p	ممان اینرسی سیستم
M_E	جرم جسم صلب سیستم معادل
M_p	جرم آونگ معادل
y	جابه جایی طولی

مقدمه

مسئله تلاطم مایع در مخازن متحرک یا ثابت، نگرانی‌های زیادی در زمینه مهندسی مکانیک، هوافضا، عمران، هسته‌ای، طراحان تانکرهای جاده‌ای و مخازن دریایی ایجاد کرده است. تلاطم باعث اعمال نیروها و گشتاورهایی بر دیواره مخازن شده که منجر به خرابی سازه‌ای خواهد شد [۴-۱] از اوایل دهه ۱۹۶۰ مسئله تلاطم، نگرانی اصلی مهندسان هوافضا در مطالعه تأثیر تلاطم سوخت مایع بر عملکرد پرواز وسیله‌های نقلیه جت به وجود آورده و زمینه‌های جدیدی از فعالیت‌های پژوهشی پدید آمده است. به طوری که اثر متقابل دینامیک تلاطم با سیستم کنترل می‌تواند پایداری و عملکرد حامل مخزن را متأثر از خود سازد [۵] از آنجا که مشخصه‌های تلاطم سیالات بستگی به فاکتورهای نظیر دامنه و فرکانس‌های تحریک، عمق سیال درون مخزن، مشخصه‌های سیال و هندسه مخزن دارد [۶]، مطالعات عمیق تری بر تلاطم سیالات با توجه به کاربرد آنها از منظر سیالاتی (استفاده از تکنیک‌های دینامیک سیالات محاسباتی) [۹-۷] و از منظر دینامیک سازه‌ای [۱۲-۱۰] صورت پذیرفته است. رویکرد دینامیک سیالات محاسباتی به واسطه رفتار پیچیده سیال در شرایط میکروگرویتی منجر به نتایج غیرقابل استنادی خواهد شد. اما رویکردهای مبتنی بر دینامیک سازه مانند مدل‌های معادل جرم و فنر یا آونگ معادل رایج‌تر هستند [۱۷-۱۳] هنگامی که پارامترهای مدل معادل مانند سیستم آونگی یا جرم و فنر به درستی انتخاب شوند، نیروها و گشتاورهای محاسبه شده با تحلیل نمونه واقعی ناشی از نیرو و گشتاورهای هیدرودینامیکی ناشی از حرکت سیال یکسان هستند. البته تعیین پارامترهای سیستم مکانیکی معادل یک فرایند دشوار است که نیاز به تجهیزات آزمایشگاهی پیشرفته و روش‌های پیشرفته تحلیل داده‌ها دارد [۱۸] ایده مدل‌های مکانیکی معادل به

واسطه مدل سازی تلاطم سوخت در شرایط بی‌وزنی نیز توسعه یافته است [۲۰-۱۹].

دستاوردهای ناشی از این تحقیقات، لزوم تحلیل‌های غیرخطی رفتار تلاطم را اثبات می‌کند. علاوه بر این، بسیاری از محققان، دینامیک سیال و وصله‌های انعطاف‌پذیر فضاپیماها را به صورت کوپل در نظر گرفته و پایداری سیستم را تحلیل کرده‌اند. به عنوان مثال، یو^۲ مانورهای وضعیت آشوبناک فضاپیما را با استفاده از روش ملنیکو^۳ مورد بررسی قرار داد [۲۲-۲۱] چالش اصلی آن است که بتوان دینامیک کوپل تلاطم و حامل آن را خصوصاً در شرایط خاص (ناپایداری سیستم) پیش‌بینی و تحلیل کرد. متأسفانه محققان اندکی به این مسئله پرداخته‌اند [۲۴-۲۳]. یکی از گزینه‌های موجود برای رفع این مشکل گنجاندن مدل‌های معادل مکانیکی تلاطم در سیستم‌های دینامیک چندجسمی است [۲۵]. چنین رویکردی می‌تواند به خوبی اثرات تلاطم بر رفتار دینامیکی حامل آن را شبیه‌سازی کرده و برای اهداف کنترلی، کمک حال طراحان باشد.

نظریه مدرن حرکات غیرخطی، در حقیقت باعث مطالعات بیشتر و کشف پدیده‌های غیرخطی پیچیده‌تری شده که شامل تلاطم چرخشی، امواج فارادی، تعامل تلاطم غیرخطی سیال با سازه‌های الاستیک، تأثیر رزونانس داخلی، حرکات انتقالی تلاطم، حرکات ضربه‌ای هیدرودینامیکی تلاطم، حرکات پل‌های مایع، امواج متقاطع و رزونانس‌های ۳ بعدی است. این یک مسئله دشوار ریاضی برای حل تحلیلی است، چرا که شرط مرزی حرکت، غیرخطی است و موقعیت سطح آزاد مایع با گذر زمان تغییر می‌کند. سطح آزاد مایع در مخازن نیم‌پر می‌تواند طیف گسترده‌ای از حرکات مانند حرکات صفحه‌ای، غیرصفحه‌ای، چرخشی، شبه متناوب، بی‌نظم و از هم پاشیدگی را تجربه کند.

به طور کلی، فشار هیدرودینامیکی مایع در مخازن صلب دارای دو مؤلفه مجزا هستند. یک مؤلفه به طور مستقیم متناسب با شتاب مخزن است و به وسیله قسمتی از سیال که هم سرعت با مخزن حرکت می‌کند، به وجود می‌آید و مؤلفه دوم که به عنوان فشار همرفتی شناخته می‌شود، تلاطم را در سطح آزاد تجربه می‌کند. نمایش حرکات مایع در داخل مخازن بسته را می‌توان با یک سیستم مکانیکی معادل تقریب زد. منظور از سیستم معادل به معنای برابری نیروها و گشتاورهای سیستم تحلیلی با نیروها و گشتاورهای اعمال شده به دیوار مخزن در حالت واقعی است. با بررسی صحیح نمایش تلاطم سیستم مکانیکی معادل، مسئله رفتار کلی سیستم دینامیکی می‌تواند راحت‌تر بیان شود. برای حرکت

هوموتوپیی پرتوربیشن استخراج شده است. استفاده از روش هوموتوپیی پرتوربیشن در شناسایی تحلیلی پایداری سیستم‌هایی چندجسمی که رفتار دینامیکی پیچیده‌ای دارند در کنار بارگذاری دو بخشی (مدل سازی نوسانات فشاری سیال درون مخزن) و حل تحلیلی شامل اثرات میرایی لزج از جمله نکات بدیع، اصلی و برجسته این مقاله به‌شمار می‌رود. پارامترهای موثر بر پایداری سیستم در قالب نمودارهای نواحی پایداری، پاسخ زمانی و دیاگرام فازیی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند.

ساختار مقاله به این صورت می‌باشد که پس از مرور پیشینه، در بخش دوم مدل آونگ معادل دینامیک غیرخطی تلاطم درون مخزن در معرض بارگذاری‌های طولی و عرضی توصیف شده است. سپس پاسخ معادلات حرکت توسط تکنیک هوموتوپیی پرتوربیشن استخراج شده است. بخش سوم به ارائه شبیه‌سازی‌ها و مقایسه نتایج در قالب پارامترهای موثر بر روش عددی رانگ کوتا مرتبه ۴ می‌پردازد و نهایتاً مقاله با ارائه نتیجه‌گیری به اتمام رسیده است.

مدل سازی ریاضی

مدل مکانیکی معادل سیستم در نظر گرفته شده در شکل (۱) نمایش داده شده است. این مدل شامل یک بدنه صلب که بیانگر مخزن استوانه‌ای و سیستم معادل برای سوخت مایع شامل یک آونگ ساده و یک جرم نقطه‌ای که مبین حرکات سیال درون این مخزن است در نظر گرفته شده است. پارامترهای سیستم معادل مبتنی بر روابط ارائه شده در مرجع [۴۰] در نظر گرفته شده است. به منظور استخراج مدل تحلیلی و با توجه به ویژگی‌های مدل آونگ معادل، فرضیاتی در نظر گرفته شده است: میزان پرشدگی مایع ۷۵٪ و دیوارهای مخزن صلب باشد، فرم حرکت تلاطم مایع به صورت صفحه‌ای است، شتاب مخزن با توجه به نیروی وارده F (ناشی از پیشران موتور حامل) به حد کافی بزرگ است که نیروهای کشش سطحی به‌طور قابل توجهی بر روی حرکت تلاطم مایع بی‌اثر است، جابه‌جایی جانبی و پیچ^{۱۱} این مخزن تحت نیروی وارده کوچک است.

نیروی وارده بر مخزن با زاویه انحراف β در راستای محور طولی در نظر گرفته شده است. این نیرو در امتداد محور طولی بزرگ و مؤلفه افقی آن کوچک در نظر گرفته شده است. بنابراین

خطی صفحه‌ای مایع، می‌توان مدل‌های مکانیکی معادل را در فرم یک سری سیستم‌های جرم-فنر-میراکننده یا یک آونگ ساده تعمیم داد.

برای پدیده تلاطم غیرخطی، مدل‌های معادل دیگری مانند آونگ سه‌بعدی یا مرکب برای مدل‌سازی دینامیک تلاطم چرخشی نیز توسعه داده شده است [۲۶]. گراهام^۱ یک مدل آونگ ساده را برای نشان دادن نوسانات سطح آزاد مایع داخل مخزن توسعه داد [۲۷]. همچنین گراهام و همکاران یک مدل شامل یک جسم صلب ثابت و یک جرم نقطه‌ای که در عمق معین به‌وسیله فنر به دیواره مخزن متصل شده را مطرح کردند [۲۸]. مدل‌هایی در قالب مدل جرم-فنر-میراکننده یا مجموعه‌ای از آونگ‌های ساده توسط اوارت^۲ [۲۹]، آرمسترانگ و همکاران^۳ [۲۰] و آبرامسون و همکاران^۴ [۳۱] مطرح شده است.

باید به این نکته توجه داشت که مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی و تعیین پاسخ دقیق برای این مسائل، مشکل و گاه غیرممکن است. روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی متعددی در تعیین رفتار سیستم‌های غیرخطی توسعه داده شده است [۳۲-۳۳] یکی از روش‌های به‌نام برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی که مبتنی بر وجود پارامترهای کوچک اغتشاشی در ساختار معادله بوده و متناسب با فیزیک مسئله است، روش پرتوربیشن است. محدودیت این روش در وجود و تعیین پارامتر کوچک اغتشاش و توجه آن با فیزیک مسئله است [۳۴] وجود این محدودیت (انطباق‌پذیری فیزیک مسئله با عدد پرتوربیشن) کاربرد روش‌های مبتنی بر اغتشاشات را محدود می‌سازد [۳۵]. به این ترتیب روش‌های به‌روزتری مانند روش هوموتوپیی پرتوربیشن، رویکرد بیشینه-کمینه^۵، روش اصلاح شده پوینکر^۶، روش توازن انرژی^۷، روش توازن هارمونیک^۸، روش بسط پارامتر^۹ و روش‌های هی^{۱۰} توسعه داده شد.

از این میان، هوموتوپیی پرتوربیشن به‌عنوان یک روش با دقت بالا برای حل مسائل غیرخطی در حوزه‌های مختلف مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است [۳۶-۳۹]

هدف این مقاله، ایجاد بستری مناسب و توسعه رویکردی با قابل اطمینان بالا (با استفاده از روش‌های تحلیلی) برای مدل‌سازی رفتار دینامیک غیرخطی تلاطم با دامنه بزرگ در قالب یک مطالعه مقایسه‌ای می‌باشد. به این منظور، معادلات دیفرانسیل کوپل تلاطم سیال با حرکت مخزن استخراج و پاسخ با به‌کارگیری روش

7. Energy Balance Method (EBM)
8. Harmonic Balance Method (HBM)
9. Parameter Expansion Method (PEM)
10. He's Approaches (Variational, Frequency amplitude)
11. Pitching

1. Graham
2. Ewart
3. Armstrong
4. Abramson
5. Max-Min Approach (MMA)
6. Modified Lindstedt-Poincare Method (MLPM)

که در آن به منظور روان سازی معادلات $c(\cdot)$ و $s(\cdot)$ به ترتیب مبین $\cos(\cdot)$ و $\sin(\cdot)$ می باشند. برای این سیستم، عبارتی برای اتلاف به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$W_\alpha = \frac{1}{2} C_\alpha \dot{\alpha}^2 \quad (3)$$

که C_α ضریب اتلاف می باشد. با استفاده از معادله لاگرانژ و جایگذاری معادلات (۱) تا (۳) در آن داریم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = - \frac{\partial W_\alpha}{\partial \dot{\alpha}} \quad (4)$$

که در آن $\ell = T - U$. همچنین تحریک ناشی از تلاطم را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \ell}{\partial x} = -F_x \quad (5)$$

با جایگذاری عبارات (۱) تا (۳) در معادله (۴)، داریم:

$$I_p \ddot{\alpha} + \ddot{x} - h_p \ddot{y} + (M_p I_p)^{-1} C_\alpha \dot{\alpha} + g s(\alpha) = 0 \quad (6)$$

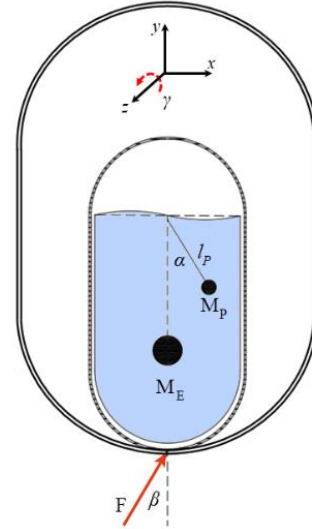
با استفاده از قانون دوم نیوتون و در نظر گرفتن عبارت $F = F_0 + F_1 c(\omega_d t)$ به عنوان تحریک خارجی وارد بر سیستم، که در آن F_0 مؤلفه ثابت نیروی وارده بر مخزن، F_1 دامنه تحریک مؤلفه هارمونیک و ω_d فرکانس تحریک می باشد، داریم:

$$\begin{bmatrix} M_T & 0 & 0 \\ 0 & M_T & 0 \\ 0 & 0 & J_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} = F_0 \begin{Bmatrix} c(\beta) \\ s(\beta) \\ Hs(\beta) \end{Bmatrix} + F_1 \begin{Bmatrix} c(\beta)c(\omega_d t) \\ s(\beta)c(\omega_d t) \\ Hs(\beta)c(\omega_d t) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

که در آن M_T جرم کل سیستم و J_T ممان اینرسی کل مخزن می باشد. باید به این نکته توجه داشت که با در نظر گرفتن نوسانات کوچک برای سطح آزاد سیال می توان از جمله اول بسط تیلور برای توابع مثلثاتی استفاده کرد، اما با فرض نوسانات بزرگ، می توان دو جمله اول بسط را برای مدل سازی رفتار غیرخطی ضعیف تلاطم در نظر گرفت. با در نظر گرفتن ارتعاشات اجباری برای سیستم فوق و لحاظ رفتار غیرخطی [۴۱]، رابطه (۶) را می توان شبیه به معادله متیو^۱ اما با ترم غیرخطی مرتبه سوم، یک ترم میرایی خطی و تابع تحریک خارجی با تغییر متغیر $\tau = 0.5\omega_d t$ به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + 2 \left(\frac{C_\alpha}{\omega_d M_p I_p} \right) \dot{\alpha} + \frac{4c(\beta)}{\omega_d^2 M_T I_p} \{F_0 + F_1 c(2\tau)\} (\alpha + \bar{n}\alpha^3) \\ = \frac{4}{\omega_d I_p} \bar{M} \{F_0 s(\beta) + F_1 s(\beta)c(2\tau)\} \end{aligned} \quad (8)$$

مخزن در معرض جابه جایی های جانبی x و زاویه پیچ γ قرار می گیرد.



شکل ۱- مدل فیزیکی مخزن استوانه ای حاوی سیال.

Fig. 1. Physical model of a cylindrical tank containing fluid.

معادلات حرکت سیستم معادل با استفاده از روش لاگرانژین استخراج می شود. به این منظور به ارائه روابطی برای انرژی جنبشی و پتانسیل پرداخته خواهد شد. انرژی جنبشی سیستم معادل مکانیکی عبارت است از:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} M_E (\dot{x} - h_E \dot{y})^2 + \frac{1}{2} M_P (\dot{x} - h_p \dot{y} + l_p \dot{\alpha})^2 \\ + \frac{1}{2} (M_E + M_P) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{\gamma}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن M_P و M_E به ترتیب جرم جسم صلب سیستم معادل و جرم آونگ معادل، h_p و h_E به ترتیب مکان های این جرم ها تا کف مخزن می باشند. طول آونگ l_p و زاویه انحراف آونگ از محور طولی مخزن، y جابه جایی طولی، I_p ممان اینرسی سیستم معادل می باشند. همانگونه که در معادله (۱) مشاهده می شود، به دلیل انحراف راستای نیروی وارده بر مخزن و اعمال نیرو در دو جهت طولی و جانبی به مخزن، در رابطه انرژی جنبشی این سیستم، مؤلفه های جابه جایی جانبی و سرعت زاویه ای پیچ به چشم می خورد. برای انرژی پتانسیل سیستم معادل داریم:

$$\begin{aligned} U = M_E g (y + h_E c(\gamma)) \\ + M_P g (y + (h_p - l_p c(\alpha))c(\gamma)) \end{aligned} \quad (2)$$

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (15)$$

$$H(v, 1) = D(v) - f(r) = 0 \quad (16)$$

فرایند تغییر ρ از صفر به یک منجر به حرکت مقدار $u_0(r)$ به مقدار دقیق آن $u(r)$ می‌شود. عبارات $L(v) - L(u_0)$ و $D(v) - f(r)$ هوموتوپیک نامیده می‌شوند. در این مقاله از پارامتر ρ به عنوان یک پارامتر کوچک استفاده شده است و فرض می‌شود که معادله (۱۴) را می‌توان به صورت یک سری توانی از ρ نوشت:

$$v = v_0 + \rho v_1 + \rho^2 v_2 + \dots \quad (17)$$

با فرض $\rho = 1$ پاسخ تقریبی برای معادله (۱۷) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u = \lim(v) = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (18)$$

سری (۱۸) در اغلب موارد همگراست. هرچند میزان همگرایی بستگی به عامل D و شرایط مشتق دوم $N(v)$ نسبت به v دارد (نرم $L^{-1}(\partial N / \partial v)$ باید کمتر از ۱ باشد، در این صورت سری همگراست) [۴۵]. اکنون به تعمیم این روش برای استخراج پاسخ رابطه (۱۱) پرداخته خواهد شد. ابتدا معادله (۱۰) با فرض $C_1 = \omega^2$ به دو بخش تفکیک می‌شود:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha \\ N(\alpha) &= \bar{n} \omega^2 \alpha^3 + 2\bar{\varepsilon} \alpha c(\omega_d t) + \\ & 2\bar{n} \bar{\varepsilon} \alpha^3 c(\omega_d t) + 2\bar{C}_\alpha \dot{\alpha} - C_2 - C_3 c(\omega_d t) \end{aligned} \quad (19)$$

با استفاده از تعریف هوموتوپی داریم [۴۶]:

$$H(\alpha, \rho) = L(\alpha) + \rho N(\alpha) = 0; \quad \rho \in [0, 1] \quad (20)$$

با توجه به بخش اول (معادله دیفرانسیل خطی) معادله (۱۹)، پاسخ عمومی به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\alpha = A e^{i\omega t} + \bar{A} e^{-i\omega t} \quad (21)$$

که در آن A و مزدوج مختلط آن \bar{A} ثابت‌های دلخواه انتگرال‌گیری هستند. معادله (۲۰) در صورتی که $\rho = 1$ باشد، به صورت معادله غیرخطی متیو تبدیل خواهد شد. برای پارامتر دلخواه ρ ، پاسخ معادله (۲۰) را می‌توان در ترم‌های ρ جستجو کرد تا تابع $\alpha(t)$ به $\alpha(t, \rho)$ تبدیل شود. در این صورت، معادله (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

که در آن \bar{n} شدت غیرخطی بودن رابطه و $\alpha_\tau = d\alpha/d\tau$ و $\ddot{\alpha} = 0.25\omega_d^2 \alpha_\tau$ ، $\dot{\alpha} = 0.5\omega_d \alpha_\tau$ فوق پارامترهای بی‌بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{4F_0 c(\beta)}{\omega_d^2 M_T l_P}, \quad C_2 = \frac{4F_0}{\omega_d l_P} s(\beta) \bar{M}, \\ C_3 &= \frac{4F_1}{\omega_d l_P} s(\beta) \bar{M} \quad \bar{C}_\alpha = \frac{C_\alpha}{\omega_d M_P l_P^2}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{2F_1 c(\beta)}{\omega_d^2 M_T l_P}, \quad (9) \\ \bar{M} &= \left(\frac{H h_P}{J_T} - \frac{1}{M_T} \right) \end{aligned}$$

با به کارگیری معادله (۹)، معادله (۸) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + 2\bar{C}_\alpha \dot{\alpha} + (C_1 + 2\bar{\varepsilon} c(2\tau))(\alpha + \bar{n} \alpha^3) \\ = C_2 + C_3 c(2\tau) \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن \bar{C}_α ضریب میرایی ناشی از ویسکوزیته سیال و $\bar{\varepsilon}$ مبین یک مقدار کوچک می‌باشند.

در این بخش به استخراج پاسخ معادله (۱۰) با استفاده از روش هوموتوپی پرتوربیشن پرداخته می‌شود. همان‌طور که پیشتر اشاره شد، هم‌افزایی روش پرتوربیشن و روش هوموتوپی محدودیت‌های روش رایج پرتوربیشن را ندارد. به منظور پیاده‌سازی این روش، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی سیستم را به صورت زیر در نظر بگیرید [۴۴-۴۱]:

$$D(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Pi \quad (11)$$

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (12)$$

که D عملگر دیفرانسیلی اصلی، B عملگر مرزی، $f(r)$ تابع تحلیلی معین و Γ مرز دامنه پاسخ (Π) است. عملگر D می‌تواند به صورت کلی به دو قسمت خطی L و غیرخطی/پارامترهای مزاحم N ، تقسیم شود. بنابراین رابطه (۱۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Pi \quad (13)$$

با اعمال این روش (ایجاد هوموتوپی) $v(r, \rho) : \Pi \times [0, 1] \rightarrow R$ که رابطه زیر را ارضا می‌کند، داریم:

$$\begin{aligned} H(v, \rho) &= (1 - \rho)[L(v) - L(u_0)] + \rho[D(v) - f(r)] \\ &= L(v) - L(u_0) + \rho[L(u_0) + \rho[N(v) - f(r)]] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن $\rho \in [0, 1]$ پارامتر هوموتوپی و u_0 تقریب اولیه از پاسخ معادله (۱۱) است، که شرایط مرزی را ارضا می‌کند. از معادله (۱۴) داریم:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)\alpha(t, \tau, \rho) + \rho \left[(2\bar{C}_\alpha \frac{d}{dt} + 2\bar{\varepsilon} c(\omega_d t)) \alpha(t, \tau, \rho) + (\bar{n}\omega^2 + 2\bar{n}\bar{\varepsilon} c(\omega_d t)) \alpha^3(t, \tau, \rho) \right] = C_2 + C_3 c(\omega_d t) \quad (29)$$

تابع تبدیل شده $\alpha(t, \tau, \rho)$ به راحتی از متغیرهای جداسازی شده به صورت زیر انتخاب می شود:

$$\alpha(t, \tau, \rho) = A(\tau)u(t, \rho) + \bar{A}(\tau)\bar{u}(t, \rho) \quad (30)$$

و تابع $u(t, \rho)$ را می توان برحسب سری های توانی پارامتر کوچک ρ به صورت زیر نوشت:

$$u(t, \rho) = u_0(t) + \rho u_1(t) + \rho^2 u_2(t) + \dots \quad (31)$$

با جایگذاری معادله (۳۱) در معادله (۳۰) خواهیم داشت:

$$\alpha(t, \tau, \rho) = A(\tau)(u_0(t) + \rho u_1(t) + \rho^2 u_2(t) + \dots) + C.C. = \alpha_0(t, \tau) + \rho \alpha_1(t, \tau) + \rho^2 \alpha_2(t, \tau) + \dots \quad (32)$$

که در آن $C.C$ مبین مزدوج مختلط است. قابل ذکر است که مشتق $\alpha(t, \tau, \rho)$ نسبت به t به صورت زیر استخراج می شود:

$$\frac{d}{dt} \alpha(t, \tau, \rho) = \frac{d}{dt} [A(\tau)u(t, \rho) + C.C] = A(\tau)\dot{u}(t, \rho) + \rho u(t, \rho)A'(\tau) + C.C. \quad (33)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t, \tau, \rho) = A(\tau)\ddot{u}(t, \rho) + 2\rho A'(\tau)\dot{u}(t, \rho) + \rho^2 u(t, \rho)A''(\tau) + C.C \quad (34)$$

که در آن $(\dot{\quad})$ مشتق نسبت به τ می باشد. با جایگذاری معادله (۳۰) در (۲۹) و استفاده از معادلات (۳۳) و (۳۴) خواهیم داشت:

$$A(\ddot{u} + \omega^2 u) + \rho(2\dot{u}A + 2\bar{C}_\alpha \dot{u}A + 2\bar{\varepsilon} u c(\omega_d t) + 2\bar{\varepsilon} \bar{n} u^3 c(\omega_d t) + \omega^2 \bar{n} u^3) + \rho^2(A'' + \mu A')u - \rho(C_2 + C_3 c(\omega_d t)) + C.C. = 0 \quad (35)$$

برای تکمیل معادله (۳۰)، معادله (۳۵) به صورت سری توانی از ρ نوشته می شود:

$$\rho^0 : A(\ddot{u}_0 + \omega^2 u_0) + \bar{A}(\ddot{\bar{u}}_0 + \omega^2 \bar{u}_0) = 0 \quad (36)$$

$$H(\alpha, \rho) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)\alpha(t, \rho) + \rho \left[(2\bar{C}_\alpha \frac{d}{dt} + 2\bar{\varepsilon} c(\omega_d t))\alpha(t, \rho) + (\bar{n}\omega^2 + 2\bar{n}\bar{\varepsilon} c(\omega_d t))\alpha^3(t, \rho) - C_2 - C_3 c(\omega_d t) \right] = 0 \quad (22)$$

قابل ذکر است که تابع هوموتوپیی (۲۲) دقیقاً همان معادله (۲۰) است، به جز برای $\alpha(t, \rho)$ که شامل پارامتر هوموتوپیی ρ می باشد. معرفی این پارامتر در داخل معادله دیفرانسیل، یک رویکرد برای توزیع مجدد قسمت تناوبی بین تکرارهای متوالی روش هوموتوپیی است؛ بنابراین، احتمال یافتن پاسخ مورد نظر را افزایش می دهد. اگر مقدار ρ از صفر به یک میل کند، تابع $\alpha(t, \rho)$ از $\alpha_0(t)$ به $\alpha(t)$ میل خواهد کرد. بسط تابع $\alpha(t, \rho)$ به صورت سری های توانی برحسب پارامترهای کوچک ρ به صورت زیر است:

$$\alpha(t, \rho) = \alpha_0(t, \rho) + \rho \alpha_1(t, \rho) + \dots \quad (23)$$

با جایگذاری این عبارت در معادله هوموتوپیی (۲۲) و نوشتن آن در سری توانی ρ ، خواهیم داشت:

$$\rho^0 : \ddot{\alpha}_0 + \omega^2 \alpha_0 = 0 \quad (24)$$

$$\rho^1 : \ddot{\alpha}_1 + \omega^2 \alpha_1 = -2\bar{C}_\alpha \dot{\alpha}_0 - 2\bar{\varepsilon} \alpha_0 c(\omega_d t) - (\bar{n}\omega^2 + 2\bar{n}\bar{\varepsilon} c(\omega_d t))\alpha_0^3 + C_2 + C_3 c(\omega_d t) \quad (25)$$

که معادله (۲۵) به وسیله پاسخ اولیه $\alpha_0 = A(\tau)e^{i\alpha t} + \bar{A}(\tau)e^{-i\alpha t}$ به وسایله پاسخ اولیه ارضاء می شود. برای فرکانس های ω_d دلخواه، ترم های سکولار در معادلات ایجاد خواهند شد که باید حذف شوند. لذا فرم کنونی معادله (۲۳) نمی تواند برای استخراج پاسخ معادله (۲۲) مفید واقع شود. به این ترتیب معادله (۲۳) باید اصلاح گردد. به این منظور با در نظر گرفتن $\tau = \rho t$ خواهیم داشت:

$$\frac{dA}{dt} = \rho \frac{dA}{d\tau}, \quad \frac{d^2 A}{dt^2} = \rho^2 \frac{d^2 A}{d\tau^2} \quad (26)$$

بنابراین فرم جدید پاسخ اولیه به صورت زیر استخراج می شود:

$$\alpha_0 = A(\tau)u_0(t) + \bar{A}(\tau)\bar{u}_0(t) \quad (27)$$

که در آن:

$$u_0 = e^{i\alpha t} \quad \bar{u}_0 = e^{-i\alpha t} \quad (28)$$

در نتیجه، معادله (۲۲) به صورت معادله (۲۹) بازنویسی می شود:

$$\alpha = d_1 e^{-\bar{c}_d t} c \left(\left(\omega + \frac{\omega}{8} \bar{n} d_1^2 e^{-2\bar{c}_d t} \right) t + d_2 \right) + \frac{2\bar{\varepsilon}}{\omega_d} d_1 e^{-\bar{c}_d t} \left(\frac{c \left((\omega + \omega_d + \frac{\omega}{8} \bar{n} d_1^2 e^{-2\bar{c}_d t}) t + d_2 \right)}{\omega_d + 2\omega} + \frac{c \left((\omega - \omega_d + \frac{\omega}{8} \bar{n} d_1^2 e^{-2\bar{c}_d t}) t + d_2 \right)}{\omega_d - 2\omega} \right) + \frac{\bar{n}}{32} d_1^3 e^{-3\bar{c}_d t} c \left(\left(3\omega + \frac{3\omega}{8} \bar{n} d_1^2 e^{-2\bar{c}_d t} \right) t + 3d_2 \right) + \bar{\varepsilon} d_1^3 e^{-3\bar{c}_d t} \left(\frac{c \left((3\omega + \omega_d + \frac{3\omega}{8} \bar{n} d_1^2 e^{-2\bar{c}_d t}) t + 3d_2 \right)}{8\omega^2 + 6\omega + \omega_d^2} + \frac{c \left((3\omega - \omega_d - \frac{3\omega}{8} \bar{n} d_1^2 e^{-2\bar{c}_d t}) t - 3d_2 \right)}{8\omega^2 - 6\omega + \omega_d^2} \right) + \frac{\bar{\varepsilon}}{\omega_d} d_1^3 e^{-3\bar{c}_d t} \left(\frac{c \left((\omega + \omega_d + \frac{\omega}{8} \bar{n} d_1^2 e^{-2\bar{c}_d t}) t + d_2 \right)}{\omega_d + 2\omega} + \frac{c \left((\omega - \omega_d - \frac{\omega}{8} \bar{n} d_1^2 e^{-2\bar{c}_d t}) t + d_2 \right)}{\omega_d - 2\omega} \right) + \frac{C_2}{\omega^2} + \frac{2C_3}{\omega^2 - \omega_d^2} c(\omega_d t) \quad (43)$$

شبیه‌سازی‌های کامپیوتری و تحلیل نتایج

در این بخش به ارائه شبیه‌سازی‌های تلاطم درون مخزن استوانه‌ای صلب با مدل آونگ معادل برای پارامترهای مختلف مؤثر بر این رفتار در قالب یک مطالعه مقایسه‌ای بین روش HPM و RK4 پرداخته شده است. پارامترهای در نظر گرفته شده برای تحلیل‌های پایداری، دیاگرام فاز، ارتعاشات و دوشاخگی عبارتند از: $M_T = 220 (kg)$ ، $F_1 = 17 (N)$ ، $F_0 = 215 (N)$ ، $\beta = 0 (deg)$ ، $l_p = 0.6 (m)$ ، $\omega_d = 1.82 (rad / sec)$.

نمودارهای پایداری را می‌توان با استفاده از تئوری فلوکه^۱ رسم کرد [۴۷]. نواحی پایدار (هاشور خورده) و ناپایدار (هاشور نخورده) سیستم بر اساس اثرات میرایی (لزجت) سیال درون مخزن و فرکانس تحریک خارجی به ترتیب در شکل‌های (۲) و (۳) نشان داده شده است. ضرایب میرایی سیال $\bar{C}_\alpha = (0, 0.2)$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که

$$\rho^1 : A(\ddot{u}_1 + \omega^2 u_1) + 2\dot{u}_0 A' + 2\bar{C}_\alpha A \dot{u}_0 + 2\bar{\varepsilon} A u_0 c(\omega_d t) + \omega^2 \bar{n} [A^3 u_0^3 + A^2 \bar{A} u_0^2 \bar{u}_0] + 2\bar{\varepsilon} c(\omega_d t) [A^3 u_0^3 + A^2 \bar{A} u_0^2 \bar{u}_0] - C_2 - C_3 c(\omega_d t) = 0 \quad (37)$$

شایان ذکر است که معادله (۳۶) به وسیله معادله (۲۸) و پاسخ مرتبه صفر معادله (۲۹) همان‌طور که در رابطه (۲۷) تأیید شد، ارضاء می‌شود. با جایگذاری معادله (۲۸) در معادله (۳۷) داریم:

$$\rho^1 : A(\ddot{u}_1 + \omega^2 u_1) + (i\omega(2A' + 2\bar{C}_\alpha A) + \omega^2 \bar{n} A^2 \bar{A}) e^{i\omega t} + \bar{\varepsilon} A (e^{i(\omega+\omega_d)t} + e^{i(\omega-\omega_d)t}) + \omega^2 \bar{n} A^3 e^{3i\omega t} + \bar{\varepsilon} A^2 (A(e^{i(3\omega+\omega_d)t} + e^{i(3\omega-\omega_d)t}) + \bar{A}(e^{i(\omega+\omega_d)t} + e^{i(\omega-\omega_d)t})) - C_2 - C_3 e^{2it} = 0 \quad (38)$$

با فرض $A = 0.5d_1(\tau)e^{id_2(\tau)}$ (که در آن d_1 و d_2 توابع حقیقی هستند) و صفر قرار دادن ترم سکولار معادله (۳۸) و جداسازی بخش حقیقی از موهومی داریم:

$$\dot{d}_1(\tau) = -\bar{C}_\alpha d_1(\tau), \quad \dot{d}_2(\tau) = \frac{1}{8} \omega \bar{n} d_1^2(\tau) \quad (39)$$

مقادیر d_1 و d_2 را می‌توان از حل معادله (۳۹) استخراج کرد. بنابراین برای A داریم:

$$A = d_1 e^{-\bar{c}_d t} c \left(\left(\frac{\omega}{8} \bar{n} d_1^2 \right) t + d_2 \right) \quad (40)$$

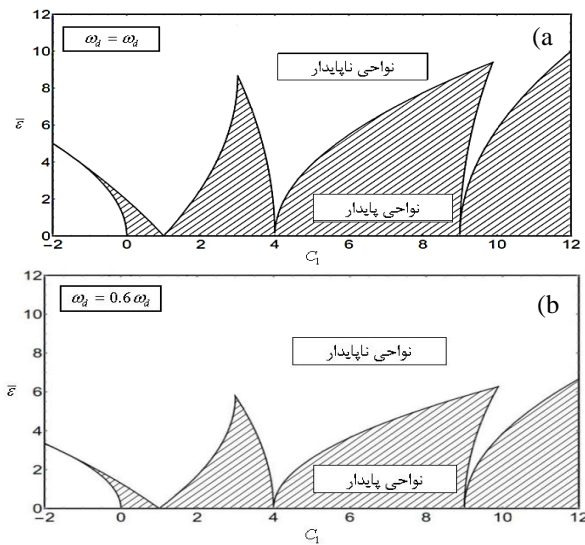
به این ترتیب، با توجه به معادله (۲۸) و معادله (۳۸) پاسخ‌های u_0 و u_1 به صورت زیر استخراج خواهند شد:

$$u_0 = e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t} \quad (41)$$

$$u_1 = \frac{\bar{\varepsilon}}{\omega_d} \left(\frac{e^{i(\omega+\omega_d)t}}{\omega_d + 2\omega} + \frac{e^{i(\omega-\omega_d)t}}{\omega_d - 2\omega} \right) + \frac{\bar{n} A^2}{8} e^{3i\alpha t} + \bar{\varepsilon} A^2 \left(\frac{e^{i(3\omega+\omega_d)t}}{8\omega^2 + 6\omega + \omega_d^2} + \frac{e^{i(3\omega-\omega_d)t}}{8\omega^2 - 6\omega + \omega_d^2} \right) + \frac{\bar{\varepsilon} A \bar{A}}{\omega_d} \left(\frac{e^{i(\omega+\omega_d)t}}{\omega_d + 2\omega} + \frac{e^{i(\omega-\omega_d)t}}{\omega_d - 2\omega} \right) + \frac{C_2}{\omega^2} + \frac{C_3}{\omega^2 - \omega_d^2} e^{i\omega_d t} \quad (42)$$

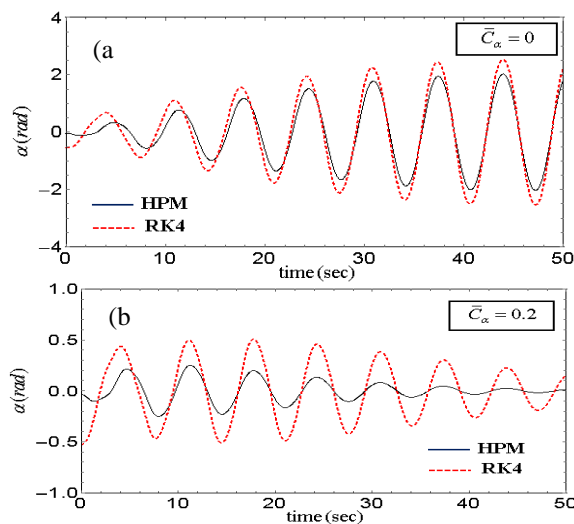
با توجه به رابطه $\alpha(t, \tau, p) = A(\tau)(u_0 + \rho u_1 + \dots)$ و با قراردادن $\rho = 1$ خواهیم داشت (معادله ۴۳):

میرایی لزج، واگرا بوده و حرکت تلاطم به سرعت وارد ناحیه ناپایدار شده است (شکل (۴-الف)). در شکل (۴-ب) که شبیه سازی ها در حضور میرایی لزج را نمایش می دهد، دامنه تلاطم وارد ناحیه پایدار شده است. در دیگرام های فازی نشان داده شده در شکل های (۵) و (۶) مشابه نمودارهای فازی پال^۱ برای پاسخ های خطی و غیرخطی است [۴۸]، محدود (پایداری) و نامحدود بودن (ناپایداری) حرکت نوسانی تلاطم سیستم در نقطه اول در حضور و غیاب میرایی لزج نشان داده شده است.



شکل ۳- نمودار پایداری برحسب فرکانس های مختلف تحریک.

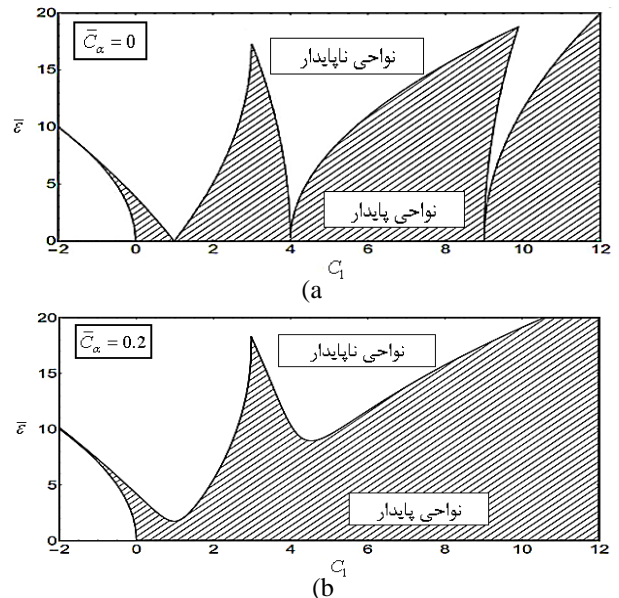
Fig. 3. Stability in terms of different excitation frequencies.



شکل ۴- پاسخ زمانی α در مختصات اول ($\bar{\epsilon} = 0.7$ و $C_1 = 1$) (الف) $\bar{C}_\alpha = 0$ (ب) $\bar{C}_\alpha = 0.2$.

Fig. 4. Time response of α in the first Point ($\bar{\epsilon} = 0.7$, $C_1 = 1$), a) $C_1 = 0$ b) $C_\alpha = 0.2$.

می توان مشاهده کرد با افزایش میزان میرایی لزج، مساحت نواحی ناپایدار کاهش یافته است. در سیستم های واقعی باید پاسخ به دور از نواحی ناپایدار باشد چراکه با قرار گرفتن پارامترهای سیستم در نواحی ناپایدار، امکان وقوع رزونانس پارامتریک خواهد بود.



شکل ۲- نمودار پایداری برحسب ضرایب مختلف میرایی سیال لزج.

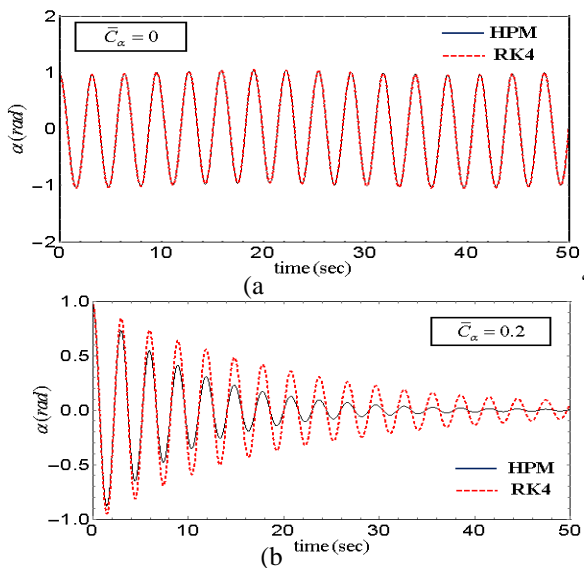
Fig. 2. Stability in terms of different viscous damping coefficients.

همان طور که در شکل (۳) نشان داده شده است، با توجه به تعریف نیروی وارده بر مخزن به صورت $F = F_0 + F_1 c(\omega_d t)$ ، با کاهش فرکانس ω_d بر مؤلفه دوم تحریک خارجی، مقدار نیروی وارده بر مخزن افزایش خواهد یافت که در مقایسه با بخش اول تابع تحریک کوچکتر است. از طرف دیگر پارامتر C_1 مستقیماً به فرکانس تحریک، بخش اول تابع تحریک و زاویه اعمال تحریک بستگی دارد. با کاهش فرکانس تحریک، مقدار C_1 افزایش یافته که منجر به کاهش مساحت نواحی پایدار و افزایش ناپایداری در سطح آزاد سیال خواهد شد.

به منظور درک عمیق تأثیر پارامترهای انتخابی بر روی پایداری حرکت تلاطم، ۲ نقطه به صورت انتخابی به طوری که $C_1 = 1$ و $\bar{\epsilon} = 0.7$ به عنوان مختصات اول و $C_1 = 4.5$ و $\bar{\epsilon} = 0.7$ به عنوان مختصات دوم در شکل (۲) به ترتیب نمایانگر وضعیت ناپایدار و پایدار برای مطالعه ویژگی های حرکتی α انتخاب شده است. نتایج برای مختصات اول که در ناحیه ناپایدار قرار دارد در قالب نمودارهای پاسخ زمانی و دیگرام فازی در شکل های (۴) و (۵) برای ضرایب میرایی مختلف نشان داده شده است.

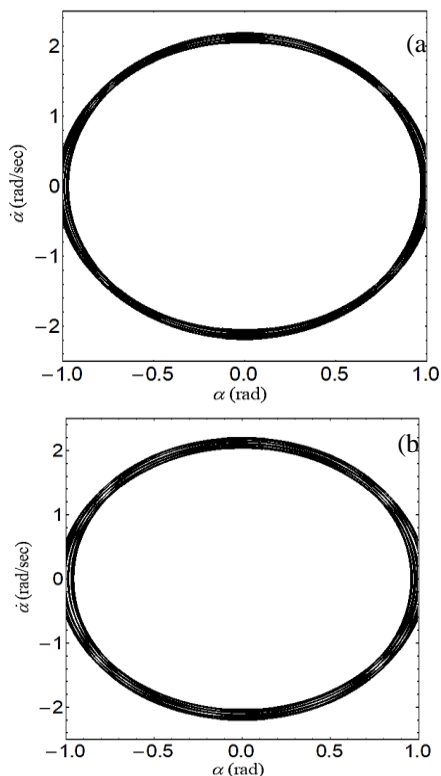
از مقایسه نتایج در دو نقطه انتخاب شده با به کارگیری دو روش HPM و RK4، می توان دریافت که سیستم در نقطه اول در غیاب

1. Pal's phase plots



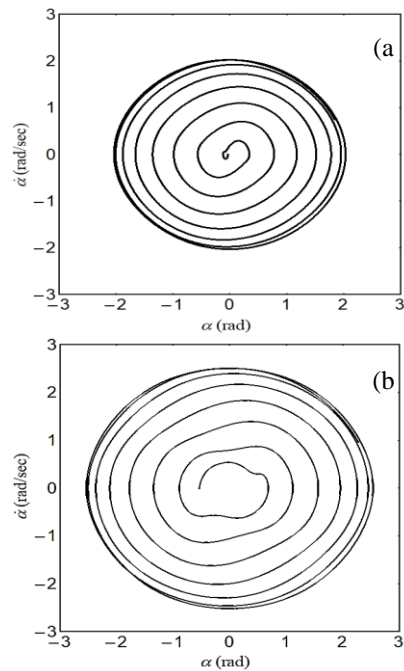
شکل ۷- پاسخ زمانی α در مختصات دوم ($\bar{\varepsilon} = 0.7$ و $C_1 = 4.5$) الف) $\bar{C}_\alpha = 0$ ب) $\bar{C}_\alpha = 0.2$.

Fig. 7. Time response of α in the second point ($\bar{\varepsilon} = 0.7$, $C_1 = 4.5$), a) $\bar{C}_\alpha = 0$, b) $\bar{C}_\alpha = 0.2$.



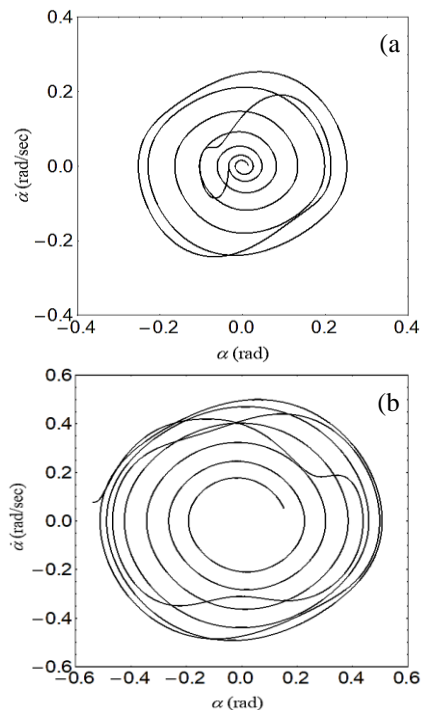
شکل ۸- دیاگرام فازی در مختصات دوم ($\bar{\varepsilon} = 0.7$ و $C_1 = 4.5$) و $\bar{C}_\alpha = 0$ الف) HPM ب) RK4.

Fig. 8. Phase diagram in the second point ($\bar{\varepsilon} = 0.7$, $C_1 = 4.5$), a) HPM b) RK4.



شکل ۵- دیاگرام فازی در مختصات اول ($\bar{\varepsilon} = 0.7$ و $C_1 = 1$) و $\bar{C}_\alpha = 0$ الف) HPM ب) RK4.

Fig. 5. Phase diagram in the first point ($\bar{\varepsilon} = 0.7$ و $C_1 = 1$), $\bar{C}_\alpha = 0$, a) HPM b) RK4.



شکل ۶- دیاگرام فازی در مختصات اول ($\bar{\varepsilon} = 0.7$ و $C_1 = 1$) و $\bar{C}_\alpha = 0$ الف) HPM ب) RK4.

Fig. 6. Phase diagram in the first point ($\bar{\varepsilon} = 0.7$ و $C_1 = 1$), $\bar{C}_\alpha = 0$, a) HPM b) RK4.

معادلات حرکت با لحاظ پارامتر غیرخطی مرتبه سوم α ، میرایی خطی و مدل آونگ معادل استخراج و با استفاده از روش هوموتوبی پرتوربیشن و روش رانگ-کوتای مرتبه چهار حل شد. برای بررسی پایداری سیستم از تئوری فلوکه استفاده و اثر میرایی و فرکانس تحریک بر تلاطم درون مخزن بررسی شد. تحلیل‌ها بیانگر اثرات میرایی تلاطم بر روی نواحی پایدار بوده، به این صورت که با افزایش ضریب میرایی تلاطم در سیستم، مساحت نواحی پایدار افزایش یافته (قادر به حذف کامل نواحی ناپایدار نمی‌باشد) و دامنه تلاطم کاهش می‌یابد. همچنین با انتخاب دو نقطه در نواحی پایدار و ناپایدار نشان داده شد که با افزایش پارامتر میرایی، نقطه واقع در ناحیه پایدار نزدیک به مرزهای پایدار شده و دامنه تلاطم را کاهش و از تشدید جلوگیری می‌کند. این تحلیل قابل تعمیم و دلیل اساسی برای استفاده از تجهیزات مکانیکی جهت کاهش نیروی تلاطم از جمله بفل‌ها جهت پوشش سطح آزاد سیال می‌باشد. از مقایسه نتایج حاصل از دو روش هوموتوبی پرتوربیشن و روش رانگ-کوتا مرتبه ۴، دقت و سادگی روش پیشنهادی همچنین پتانسیل آن در تعامل با سیستم‌های با دینامیک غیرخطی و پیچیده را نشان می‌دهد.

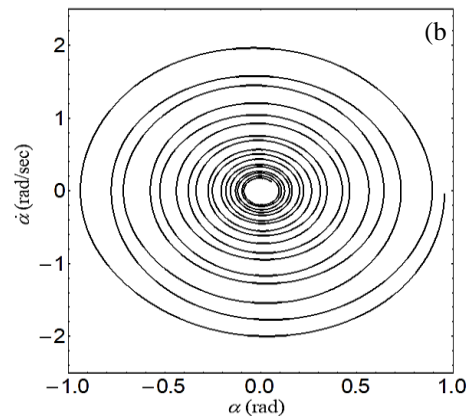
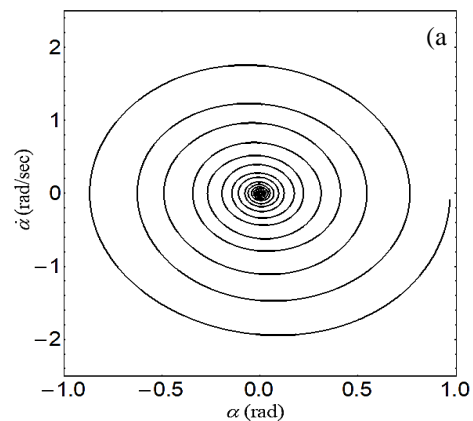
تعارض منافع

هیچگونه تعارض منافع توسط نویسنده بیان نشده است.

مراجع

- [1] A. R. Pandit and K. C. Biswal, "Evaluation of dynamic characteristics of liquid sloshing in sloped bottom tanks," *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 8, pp. 162-177, 2020, <https://doi.org/10.1007/s40435-019-00527-8>.
- [2] M. Ghalandari, S. Bornassi, S. Shamshirband, A. Mosavi, and K. W. Chau, "Investigation of submerged structures' flexibility on sloshing frequency using a boundary element method and finite element analysis," *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, vol. 13, no. 1, pp. 519-528, 2019, <https://doi.org/10.1080/19942060.2019.1619197>.
- [3] M. Chiba and H. Magata, "Influence of liquid sloshing on dynamics of flexible space structures," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 401, pp. 1-22, 2017, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.04.029>.
- [4] J. K. Paik and Y. S. Shin, "Structural damage and strength criteria for ship stiffened panels under impact pressure actions arising from sloshing, slamming and green water loading," *Ships and Offshore Structures*, vol. 1, no. 3, pp. 249-256, 2006, <https://doi.org/10.1533/saos.2006.0109>.

برای نقطه دوم نیز به مانند نقطه اول، همان طور که در شکل‌های (۷) تا (۹) نشان داده شده است در حضور مقادیر میرایی $\bar{C}_\alpha = 0$ و $\bar{C}_\alpha = 0.2$ ، به ترتیب دامنه حرکت ثابت و کاهش یافته است. هرچند وجود میرایی نمی‌تواند به صورت کامل رشد دامنه را از بین ببرد. متفاوت از پاسخ‌های حرکت در نقطه اول، در نقطه دوم حرکات تلاطم پایدار می‌باشد و دامنه حرکات در حالتی که ضریب میرایی برابر صفر در نظر گرفته شده است، به صورت هارمونیک و متناوب می‌باشد و در حضور میرایی دامنه حرکت تلاطم همگراست. قابل ذکر است که تحلیل‌های انجام شده، متناسب با دامنه تلاطم‌های بزرگ در مقایسه با ابعاد مخزن می‌باشند.



شکل ۹- دیاگرام فازی در مختصات دوم ($C_1 = 4.5$ و $\bar{\varepsilon} = 0.7$ و $\bar{C}_\alpha = 0.2$) (الف) HPM (ب) RK4.

Fig. 9. Phase diagram in the second point ($C_1 = 4.5$, $\bar{\varepsilon} = 0.7$), $\bar{C}_\alpha = 0.2$, a) HPM b) RK4.

نتیجه گیری

در این مقاله به تحلیل دینامیک کوپل تلاطم- مخزن استوانه‌ای که در معرض بارگذاری‌های عرضی و طولی قرار گرفته است پرداخته شد.

- mechanical model for fluid sloshing in a rigid cylindrical tank equipped with a rigid annular baffle," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 72, pp. 569-587, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.024>.
- [15] M. Shahravi and M. Azimi, "Effects of baffles geometry on sloshing dynamics of a viscous liquid tank," *Scientific Research and Essays*, vol. 7, no. 47, pp. 4092-4099, 2012, <https://doi.org/10.5897/SRE12.647>.
- [16] M. Navabi and A. Davodi, "Modeling and control of fuel sloshing and its effect on spacecraft attitude," *Journal of Space Science and Technology*, vol. 11, no. 4, pp. 11-22, 2018, (in Persian).
- [17] M. Navabi and A. Davodi, "Modeling of fuel sloshing in a spacecraft and control it by active control method using nonlinear control," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 19, no. 9, pp. 2121-2128, 2019, (in Persian).
- [18] J. F. Unruh, D. D. Kana, F. T. Dodge, and T. A. Fey, "Digital data analysis techniques for extraction of slosh model parameters," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 23, no. 2, pp. 171-177, 1986, <https://doi.org/10.2514/3.25096>.
- [19] Á. Romero-Calvo, G. Cano Gómez, E. Castro-Hernández, and F. Maggi, "Free and forced oscillations of magnetic liquids under low-gravity conditions," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 87, no. 2, 2020, Art. no. 021010, <https://doi.org/10.1115/1.4045620>.
- [20] M. Ebrahimi, M. A. Noorian, and M. Javadi, "Sloshing dynamics in 2D multi-baffled containers under low-gravity conditions," *Microgravity Science and Technology*, vol. 32, pp. 983-998, 2020, <https://doi.org/10.1007/s12217-020-09825-9>.
- [21] Y. Bao-Zeng, "Heteroclinic bifurcations in completely liquid-filled spacecraft with flexible appendage," *Nonlinear Dynamics*, vol. 51, pp. 317-327, 2008, <https://doi.org/10.1007/s11071-007-9213-6>.
- [22] Y. Baozeng and X. Jiafang, "Chaotic attitude maneuvers in spacecraft with a completely liquid-filled cavity," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, no. 4-5, pp. 643-656, 2007, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.11.035>.
- [23] M. Chiba and H. Magata, "Coupled pitching dynamics of flexible space structures with on-board liquid sloshing," *Acta Astronautica*, vol. 181, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.11.002>.
- [24] M. Deng, H. Huang, Z. Li, B. Yue, Y. Lin, and G. Liu, "Coupling dynamics of flexible spacecraft filled with liquid propellant," *Journal of*
- [5] H. N. Abramson, "The dynamic behavior of liquids in moving containers, with applications to space vehicle technology," NASA, Tech. Rep, 1967000655, 1966. [online]. Available: <https://ntrs.nasa.gov/citations/1967000655>
- [6] H. Akyildiz, "A numerical study of the effects of the vertical baffle on liquid sloshing in two-dimensional rectangular tank," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no 1, pp. 41-52, 2012, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.08.002>.
- [7] G. J. Kim, H. Rhee, W. H. Jeon, J. Jeong, and D. S. Hwang, "Lateral sloshing analysis by CFD and experiment for a spherical tank," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, vol. 21, pp. 816-825, 2020, <https://doi.org/10.1007/s42405-020-00295-2>.
- [8] F. Sabri and A. A. Lakis, "Hydroelastic vibration of partially liquid-filled circular cylindrical shells under combined internal pressure and axial compression," *Aerospace Science and Technology*, vol. 15, no. 4, pp. 237-248, 2011, <https://doi.org/10.1016/j.ast.2010.07.003>.
- [9] H. F. Bauer and W. Eidel, "Frictionless liquid sloshing in circular cylindrical container configurations," *Aerospace Science and Technology*, vol. 3, no. 5, pp. 301-311, 1999, [https://doi.org/10.1016/S1270-9638\(00\)86966-7](https://doi.org/10.1016/S1270-9638(00)86966-7).
- [10] K. Pan and D. Cao, "Absolute nodal coordinate finite element approach to the two-dimensional liquid sloshing problems," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-Body Dynamics*, vol. 234, no. 2, pp. 322-346, 2020, <https://doi.org/10.1177/1464419320907785>.
- [11] S. Farmani, M. Ghaeini-Hessaroeiyeh, and S. Hamzehei-Javaran, "Developing new numerical modeling for sloshing behavior in two-dimensional tanks based on nonlinear finite-element method," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 145, no. 12, 2019, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)JEM.1943-7889.0001686](https://doi.org/10.1061/(ASCE)JEM.1943-7889.0001686).
- [12] B. Tang, J. Li, and T. Wang, "The least square particle finite element method for simulating large amplitude sloshing flows," *Acta Mechanica Sinica*, vol. 24, pp. 317-323, 2008, <https://doi.org/10.1007/s10409-008-0144-3>.
- [13] B. Xing and J. Huang, "Control of pendulum-sloshing dynamics in suspended liquid containers," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 68, no. 6, pp. 5146-5154, 2020, <https://doi.org/10.1109/TIE.2020.2991933>.
- [14] Y. Sun, D. Zhou, and J. Wang, "An equivalent

- [35] P. B. Gonçalves, F. M. A. Silva, and Z. J. G. N. Del Prado, "Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, no. 3, pp. 641-663, 2008, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.063>.
- [36] M. Ghadiri and M. Safi, "Nonlinear vibration analysis of functionally graded nanobeam using homotopy perturbation method," *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 9, no. 1, pp. 144-156, 2017, <https://doi.org/10.4208/aamm.2015.m899>.
- [37] K. Manimegalai, S. Zephania CF, P.k. Bera, P. Bera, S.k. Das, and T. Sil, "Study of strongly nonlinear oscillators using the Aboodh transform and the homotopy perturbation method," *The European Physical Journal Plus*, vol. 134, 2019, Art. no. 462, <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12824-6>.
- [38] M. Shishesaz, M. Shariati, A. Yaghootian, and A. Alizadeh, "Nonlinear vibration analysis of nano-disks based on nonlocal elasticity theory using homotopy perturbation method," *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 11, no. 02, 2019, Art. no. 1950011, <https://doi.org/10.1142/S175882511950011X>.
- [39] A. A. Yazdi, "Nonlinear aeroelastic stability analysis of three-phase nano-composite plates," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 47, no. 6, pp. 753-768, 2019, <https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1610436>.
- [40] R. A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*: Cambridge University Press, 2005.
- [41] S. Abbasbandy, "Homotopy perturbation method for quadratic Riccati differential equation and comparison with Adomian's decomposition method," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 172, no. 1, pp. 485-490, 2006, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.02.014>.
- [42] T. Öziş and C. Akçı, "Periodic solutions for certain non-smooth oscillators by iterated homotopy perturbation method combined with modified Lindstedt-Poincaré technique," *Meccanica*, vol. 46, pp. 341-347, 2011, <https://doi.org/10.1007/s11012-010-9312-1>.
- [43] C. Chun and R. Sakthivel, "Homotopy perturbation technique for solving two-point boundary value problems-comparison with other methods," *Computer Physics Communications*, vol. 181, no. 6, pp. 1021-1024, 2010, <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2010.02.007>.
- Aerospace Engineering*, vol. 32, no. 5, 2019, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0001070](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0001070).
- [25] W. Kong and Q. Tian, "Dynamics of fluid-filled space multibody systems considering the microgravity effects," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 148, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.103809>.
- [26] F. Liu, B. Yue, Y. Tang, and M. Deng, "3DOF-rigid-pendulum analogy for nonlinear liquid slosh in spherical propellant tanks," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 460, 2019, Art. no. 114907, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114907>.
- [27] G. E. Ransleben, Jr. and H. N. Abramson, "Discussion: "Production of rotation in a confined liquid through translational motion of the boundaries,"" *Journal of Applied Mechanics*, vol. 27, no. 2, pp. 513-516, 1960, <https://doi.org/10.1115/1.3643981>.
- [28] E. W. Graham and A. M. Rodriguez, "The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 19, no. 3, pp. 381-388, 1952, <https://doi.org/10.1115/1.4010515>.
- [29] D. Ewart, "Fuel oscillations in cylindrical tanks and the forces produced thereby," De Havilland Propellers Ltd, GW Dynamics Dept., Tech. Note, no. 02050, 1956.
- [30] G. Armstrong and K. Kachigan, "Propellant sloshing," *Handbook of Astronautical Engineering*, McGraw Hill, p. 14, 1961.
- [31] G. Armstrong and K. Kachigan, "Propellant sloshing," *Handbook of Astronautical Engineering*, McGraw Hill, pp. 14-27, 1961.
- [32] A. Beléndez *et al.*, "Application of the harmonic balance method to a nonlinear oscillator typified by a mass attached to a stretched wire," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, no. 4-5, pp. 1018-1029, 2007, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.12.011>.
- [33] D. Younesian, H. Askari, Z. Saadatnia, and M. KalamiYazdi, "Frequency analysis of strongly nonlinear generalized Duffing oscillators using He's frequency-amplitude formulation and He's energy balance method," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 9, pp. 3222-3228, 2010, <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.03.013>.
- [34] A. Allahverdizadeh, R. Oftadeh, M. J. Mahjoob, and M. H. Naei, "Homotopy perturbation solution and periodicity analysis of nonlinear vibration of thin rectangular functionally graded plates," *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 27, no. 2, pp. 210-220, 2014, [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(14\)60031-8](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(14)60031-8).

- [46] J. H. He, "Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 20, no. 10, pp. 1141-1199, 2006, <https://doi.org/10.1142/S0217979206033796>.
- [47] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, 2008.
- [48] P. Pal and S. Bhattacharyya, "Sloshing in partially filled liquid containers—Numerical and experimental study for 2-D problems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 21, pp. 4466-4485, 2010, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.05.006>.
- [44] B. Batiha, "A new efficient method for solving quadratic Riccati differential equation," *International Journal of Applied Mathematics Research*, vol. 4, no. 1, pp. 24-29, 2015, <https://doi.org/10.14419/ijamr.v4i1.4113>.
- [45] J. H. He, "A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 35, no. 1, pp. 37-43, 2000, [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00085-7).