JSST

10.22034/jsst.2021.1128

Vol. 14/ Issue 3/ 2021 (No. 48)
pp. 65-73

Research Paper

Using The qEKF Algorithm for Satellite Attitude Estimation with Two Magnetometer & Sun Sensors

Abbas Saeidi[1], Nasser Rahbar[2]*, and Mohammad Ali Alirezapouri[3]

1, 2, 3. University of Electrical and Electronics Complex, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, IRAN.

* rahbar_nas@mut.ac.ir

In recent years, according to progress of aerospace industries particularly satellites it has been paying much attention to attitude determination of satellite. Attitude determination of satellite in various ways, such as: radio, radar, optical methods and using GPS, q and kalman filter is done, that each of these methods has advantages and disadvantages. Due to disturbance in space, high accuracy in attitude determination, various algorithms to obtain properly accurately attitude, desirable access to position, velocity and time of satellite to achieve desired attitude determination satellite are considered a top priority. ***However,*** *in this Paper, first we review the various methods for attitude determination satellite and then examine of operation and relations of algorithms discussed. This Paper focus on the advantages and disadvantages of qEKF algorithm in compare to other methods are available.*

Keywords: Satellite, Attitude determination, Attitude estimation, qEKF algorithm, kalman filter, q-method

---

1. M.Sc.
2. Associate Professor (Corresponding Author)
3. PhD

Received: 2018.07.05/ Accepted: 2021.03.09/ Publish Online: 2021.10.01/ Online ISSN: 2423-4516 / Print ISSN: 2008-4560

JSST

DOI: 10.22034/JSST.2021.1270 دوره ۱۴ / شمارهٔ ۳/ پاییز ۱۴۰۰ (شماره پیاپی ۴۸)
ص. ص. ۷۳- ۶۵

مقاله علمی- پژوهشی

کاربرد الگوریتم qEKF در تخمین وضعیت ماهواره با استفاده از حسگرهای مغناطیسی و خورشید

عباس سعیدی[۱]، ناصر رهبر[۲]*، محمدعلی علیرضاپوری[۳]

۱، ۲ و ۳- مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

***Rahbar_nas@mut.ac.ir**

تعیین و کنترل وضعیت موضوعی است که همراه با توسعه فناوری ماهواره با اقبال مواجه شده است. طی سال‌های گذشته روش‌های قطعی و تکراری برای تعیین وضعیت ماهواره‌ها به‌منظور بهبود عملکرد این تعیین وضعیت، توسعه فراوانی یافته و الگوریتم‌های متنوعی در این حوزه ارایه شده است. زیرسیستم تعیین وضعیت تأمین‌کننده داده‌های ورودی موردنیاز الگوریتم‌های تعیین موقعیت و کنترل وضعیت ماهواره است. در ماهواره‌هایی که در مدارهای نزدیک به زمین قرار می‌گیرند و از حسگرهای محدودی برای تعیین وضعیت بهره می‌گیرند، به‌طورمعمول از ترکیب روش‌های قطعی و تکراری تعیین وضعیت و در شرایطی که داده‌های یکی از حسگرها از دسترس خارج شود، از سوئیچ بین این روش‌ها استفاده می‌گردد. روش‌های قطعی و تکراری دارای مزایا و معایبی گوناگونی هستند و در این مقاله با استفاده از ایده ترکیب روش‌های قطعی و تکراری، روش qEKF برای تعیین وضعیت ماهواره به کار گرفته می‌شود. در توسعه مبانی ریاضی الگوریتم QEKF، از ایده فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای اصلاح روش تکراری Quest استفاده می‌شود و در نتیجه روشی جدید برای تخمین بردار حالت تشکیل شده از حالت‌های وضعیت و غیر وضعیت ماهواره توسعه داده می شود. برای ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی، شبیه‌سازی‌های مختلفی برای یک ماهواره در مدار نزدیک به زمین که دارای حسگرهای خورشید، مغناطیسی و ژیروسکوپ سه محوره است، انجام‌گرفته و نتایج با روش SOAR مقایسه شده است. بررسی نتایج نشان‌دهنده عملکرد قابل‌قبول روش پیشنهادی در قیاس با دیگر روش‌ها در تخمین وضعیت ماهواره و بایاس ژیروسکوپ‌هاست.

واژه‌های کلیدی : ماهواره، تعیین وضعیت، فیلتر کالمن توسعه‌یافته، الگوریتم qEKF، روش q

علائم و اختصارات

$\mathbf{T}$	ماتریس وضعیت
$\mathbf{y}$	بردار مشاهدات در دستگاه بدنه فضاپیما
$\mathbf{n}$	بردار واحد مرجع مرتبط با اندازه‌گیری در دستگاه اینرسی
a_i	وزن‌های ثابت مرتبط با هر جفت‌بردار
$\boldsymbol{\theta}$	وضعیت
$\mathbf{s}$	حالت‌های غیروضعیت

مقدمه

با توجه به پیشرفت روزافزون صنایع هوافضایی و به‌خصوص صنعت ماهواره‌ای، در سال‌های اخیر محققان بسیاری به موضوع تعیین و کنترل وضعیت ماهواره پرداخته‌اند. مسئله تعیین وضعیت ماهواره وابستگی بسیاری به حسگرهای تعیین وضعیت مورد استفاده در ماهواره دارد. از سوی دیگر، محدودیت‌های اقتصادی باعث می‌گردد که در بسیاری از ماهواره‌ها، امکان استفاده از حسگرهای گران‌قیمت و دقیق فراهم نباشد. این امر باعث گشته است که مسئله تعیین وضعیت ماهواره با استفاده از حسگرهای ارزان‌قیمت موردتوجه قرار گیرد و در نتیجه موضوع توسعه الگوریتم‌های تعیین وضعیت

۱. کارشناس ارشد
۲. دانشیار (نویسنده مخاطب)
۳. دکتری

دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۴/۱۴ / پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۱۹/ چاپ الکترونیکی: ۱۴۰۰/۰۴/۰۱/ شاپای الکترونیکی: ۴۵۱۶-۲۴۲۳ / شاپای چاپی: ۴۵۱۶-۲۰۰۸

موردتوجه جدی محققان واقع شود [۳-۱]. حسگرهایی مختلفی مانند ردیاب ستاره [۴]، ناوبری جهانی، خورشیدی [۵]، مغناطیسی [۶]، اینرسی (ژایروها و شتاب‌سنج‌ها) و زمین [۷] برای تعیین وضعیت ماهواره به کار گرفته می‌شوند [۸]. در ماهواره‌های کوچک معمولاً از دو حسگر خورشیدی و حسگر مغناطیسی برای تعیین وضعیت ماهواره استفاده می‌گردد. لازم به ذکر است که حسگر خورشیدی در ماهواره‌هایی که در مدارهای نزدیک به زمین قرار دارند، در بخشی از مسیر حرکتی خود در سایه زمین قرار می‌گیرد و در این شرایط تنها حسگر مغناطیسی برای تعیین وضعیت به کار گرفته می‌شود.

در تعیین وضعیت فضاپیماها طیف گسترده‌ای از الگوریتم‌ها برای تعیین وضعیت با استفاده از داده‌های حسگرهای تعیین وضعیت مورداستفاده قرار می‌گیرند. روش‌های تعیین وضعیت ماهواره به دودسته کلی روش‌های قطعی و تکراری تقسیم‌بندی می‌شوند [۹]. روش تعیین وضعیت قطعی یا بدون حافظه، روشی است که وضعیت ماهواره را به‌صورت نقطه‌به‌نقطه[4] تعیین می‌کند. در این روش حل مسئله تعیین وضعیت اغلب بدون در نظر گرفتن خواص آماریِ اندازه‌گیری‌های به‌دست‌آمده از حسگرهای وضعیت انجام می‌شود و لازم است که حداقل دو بردار اندازه‌گیری وضعیت یا به‌بیان‌دیگر دو حسگر تعیین وضعیت داشته باشیم [۱۰]. یک سال پس از ارائه روش جبری برای تعیین وضعیت توسط هارولد بلک [۱۱] خانم گریس وهبا مسئله تعیین وضعیت مشهور خود را منتشر کرد که برای هر تعداد بردار مشاهدات پاسخگو بود [۱۲]. اولین الگوریتم عملی برای حل مسئله وهبا روش q بود که توسط داونپورت[5] مطرح و توسط کیت[6] [۱۳] منتشر شد. روش‌های بسیاری برای حل این مسئله ارائه‌شده است که بسیاری از آن‌ها روش‌هایی عددی هستند. مهم‌ترین ضعف این الگوریتم‌ها آن است که قادر نیستند تا متغیرهای غیر وضعیت (مانند بایاس ژایروها) را تخمین بزنند و از سوی دیگر در صورت از دست دادن یک حسگر، این روش قادر به تخمین وضعیت ماهواره نخواهد بود [۱۰].

در مقابل روش‌های قطعی، روش‌های تکراری تعیین وضعیت ماهواره علاوه بر داده‌های به‌دست‌آمده از حسگرهای وضعیت از مدل دینامیکی حرکت فضاپیما نیز بهره می‌گیرند تا قادر باشند مسیر حرکتی ماهواره را با دقت مناسبی تخمین بزنند. این روش‌ها عمدتاً مبتنی بر فیلترهای بیزین توسعه داده‌شده‌اند که از مهم‌ترین این روش‌ها می‌توان به خانواده فیلترهای کالمن و فیلترهای ذره‌ای اشاره کرد [۱۶-۱۴]. عدم قطعیت‌های موجود در مدل‌های دینامیکی و وابستگی عملکرد فیلتر به‌دقت مدل نیز یکی از نقاط ضعف این روش‌ها است. بر این اساس، در این مقاله با استفاده از ایده ترکیب روش‌های تکراری و قطعی که در [10] با عنوان qEKF ارائه‌شده است، الگوریتمی را برای تخمین وضعیت یک ماهواره که در مداری نزدیک به زمین حرکت می‌کند توسعه می‌دهیم که تنها از حسگرهای مغناطیسی، ژیروسکوپ و حسگر خورشید بهره می‌گیرد.

الگوریتم پیشنهادی به‌طور هماهنگ تخمین غیرخطی کواترنیون وضعیت را با استفاده از روش q داونپورت و تخمین غیرخطی حالات غیر وضعیت را در چارچوب فیلتر کالمن تعمیم‌یافته باهم ترکیب و برای تخمین حالات از تکنیک‌های فیلتر کالمن استفاده می‌کند. فیلتر qEKF در مقایسه با فیلترهای دیگری چون QUEST [۱۷] این مزیت را دارد که قادر است علاوه بر حالات وضعیت، حالات غیر وضعیت را نیز تخمین بزند ولی فیلتر QUEST تنها قادر است تخمین بزند. فیلتر SOAR [۱۷] هنگامی‌که کسوف رخ می‌دهد قابلیت تخمین حالات وضعیت و غیر وضعیت را ندارد ولی الگوریتم qEKF پیشنهادی همه این کمبودها و نقطه‌ضعف‌ها را با ملاحظات در نظر گرفتن تخمین وضعیت اولیه و استفاده از ایده فیلتر کالمن بر روی روش‌های قطعی برطرف می‌کند. بنابراین در ادامه و در بخش دوم به مسئله پایه‌ای وهبا به‌عنوان پایه تعیین وضعیت قطعی پرداخته می‌شود. پس آن و در بخش سوم به موضوع فیلتر qEKF پرداخته خواهد شد و مبانی ریاضی این فیلتر ارائه خواهد گردید. در بخش چهارم نیز به ارائه نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی برای تعیین وضعیت یک ماهواره که در مدار نزدیک به زمین حرکت می‌کند، ارائه می‌گردد و درنهایت در بخش پنجم جمع‌بندی مقاله ارائه خواهد شد.

مسئله وهبا، راه‌حل داونپورت و تحلیل کوواریانس خطای تخمین

از دیدگاه تعیین وضعیت، مسئله وهبا روشی برای محاسبه بردار وضعیت ماهواره با استفاده از حداقل‌سازی حداقل مربعات وزن‌دار خطای بین ماتریس وضعیت و بردارهای اندازه‌گیری است که لازم است دارای حداقل دو بردار اندازه‌گیری مستقل و غیر وابسته خطی باشیم [۲] که این توصیف را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \left\| \mathbf{y_i} - \mathbf{T}\mathbf{n_i} \right\|^2 \qquad \text{(۱- الف)}$$

$$\sum_i a_i = 1 \qquad \text{(۱- ب)}$$

که روابط فوق، $\mathbf{T}$ ماتریس وضعیت، $\mathbf{y}$ بردار مشاهدات در دستگاه بدنه فضاپیما، $\mathbf{n}$ بردار واحد مرجع مرتبط با اندازه‌گیری در دستگاه

4. Point-to-Point
5. Davenport
6. Keat

اینرسی و a_i وزن‌های ثابت مرتبط با هر جفت‌بردار هستند [۳و۴]. درصورتی‌که دو بردار اندازه‌گیری وضعیت از حسگرهای خورشید و مغناطیسی به‌دست آیند، متغیرهای معرف این دو اندازه‌گیری و بردار مرجع مربوط در جدول ۱ ارائه‌شده است.

جدول ۱– بردارهای مرجع و اندازه‌گیری مدل‌های مختلف ماهواره

موقعیت ماهواره	مدل خورشید	بردار مرجع خورشید	اندازه‌گیری با حسگر خورشید
		$\mathbf{n}_1$	$\mathbf{y}_1$
	مدل میدان مغناطیسی	بردار مرجع میدان مغناطیسی	اندازه‌گیری با حسگر مغناطیسی
		$\mathbf{n}_2$	$\mathbf{y}_2$

ماتریس T در فضای کواترنین‌ها به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T}(\bar{\mathbf{q}}) = \mathbf{I}_{3\times3} - 2q_4[\mathbf{q}_\mathbf{v}\times] + 2[\mathbf{q}_\mathbf{v}\times]^2 \quad (۲\text{–الف})$$

$$[\mathbf{q}_\mathbf{v}\times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲\text{–ب})$$

با انجام عملیات ریاضی و برای کمینه‌کردن تابع هزینه J، با تعریف B به‌عنوان ماتریس پروفایل کافی است عبارت زیر را بیشینه کنیم:

$$\max_{\bar{\mathbf{q}}} G = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{a_i}\mathbf{y}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\mathbf{T}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{n}_\mathbf{i} \quad (۳\text{– الف})$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{y}_\mathbf{i}\mathbf{n}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \quad (۳\text{– ب})$$

حال با توجه به خواص trace ماتریس، معادله (۳) را به‌صورت معادله (۴) بازنویسی و با جایگذاری (۳) در (۴) به معادله (۶) خواهیم رسید:

$$G = trace[G] = trace\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{y}_\mathbf{i}^\mathbf{T}\mathbf{T}\mathbf{n}_\mathbf{i}\right] \quad (۴\text{– الف})$$
$$\Rightarrow G = trace\left[\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{T}(\bar{\mathbf{q}})\right].$$

$$G = trace\left[\mathbf{B}^\mathbf{T}\right] - 2q_4 trace\left[\mathbf{B}^\mathbf{T}[\mathbf{q}_\mathbf{v}\times]\right] + 2trace\left[\mathbf{B}^\mathbf{T}[\mathbf{q}_\mathbf{v}\times]^2\right] \quad (۴\text{– ب})$$

با توجه به سه جمله شاخص عملکرد و تعریف روابط زیر، شاخص عملکرد به فرم معادله (۵) تغییر خواهد کرد:

$$trace\left[B^T\right] = trace[B] \equiv \sigma \quad (۵\text{– الف})$$

$$-2q_4 trace\left[\mathbf{B}^\mathbf{T}[\mathbf{q}_\mathbf{v}\times]\right] = 2q_4\mathbf{z}^\mathbf{T}\mathbf{q}_\mathbf{v} \quad (۵\text{– ب})$$

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{y}_\mathbf{i}\times\mathbf{n}_\mathbf{i}) \quad (۵\text{– ج})$$

$$2trace\left[\mathbf{B}^\mathbf{T}[\mathbf{q}_\mathbf{v}\times]^2\right] = \mathbf{q}_\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{q}_\mathbf{v} \quad (۵\text{– د})$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{n} a_i\left([\mathbf{y}_\mathbf{i}\times][\mathbf{n}_\mathbf{i}\times] + [\mathbf{n}_\mathbf{i}\times][\mathbf{y}_\mathbf{i}\times]\right) \quad (۵\text{– ه})$$

شاخص عملکرد به معادله (۶) تبدیل می‌شود:

$$G = \sigma + 2q_4\mathbf{z}^\mathbf{T}\mathbf{q}_\mathbf{v} + \mathbf{q}_\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{q}_\mathbf{v} \quad (۶)$$

که این شاخص با توجه به $\bar{\mathbf{q}}$ بیشینه می‌شود، پس می‌توان از جمله σ صرف‌نظر کرد. حال با تعریف ماتریس بهره K به شکل رابطه (۱۱) مسئله بهینه‌سازی معادل این است که شاخص عملکرد G رابطه (۱۲) را بیشینه کنیم.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^\mathbf{T} & 0 \end{bmatrix} \quad (۷\text{– الف})$$

$$G = \bar{\mathbf{q}}^\mathbf{T}\mathbf{K}\bar{\mathbf{q}} \quad (۷\text{– ب})$$

با حل این مسئله بیشینه‌سازی به‌وسیله ضرایب لاگرانژ به رابطه $\mathbf{K}\bar{\mathbf{q}} = \lambda\bar{\mathbf{q}}$ می‌رسیم که کواترنیون بهینه بردار ویژه مرتبط با بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس K هست. در نتیجه مشاهده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار ویژه شاخص عملکرد را بیشینه می‌کند و پس از آن تخمین وضعیت بهینه را تولید می‌کند. ماتریس تخمین وضعیت را می‌توان به دو ماتریس وضعیت واقعی و خطای وضعیت $\delta\bar{\mathbf{q}}$ تجزیه کرد که در دستگاه بدنه تعریف‌شده است.

$$\mathbf{T}(\hat{\bar{\mathbf{q}}}) = \mathbf{T}(\delta\bar{\mathbf{q}}^*)\mathbf{T}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (۸)$$

هنگامی‌که در اندازه‌گیری‌ها خطا نداشته باشیم خطای وضعیت صفر خواهد بود که نتیجه مورد انتظاری است و تخمین وضعیت با وضعیت واقعی معادل می‌شود. اگر خطاها در اندازه‌گیری‌ها لحاظ شوند، مدل اندازه‌گیری‌ها به روابط زیر تبدیل می‌شوند:

$$\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{i} = \mathbf{T}\mathbf{n}_\mathbf{i} + \delta\mathbf{y}_\mathbf{i} \quad (۹\text{–الف})$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_\mathbf{i} = \mathbf{n}_\mathbf{i} + \delta\mathbf{n}_\mathbf{i} \quad (۹\text{– ب})$$

حال شاخص عملکرد چنین تغییر می‌کند:

$$G = \delta\bar{\mathbf{q}}^{*\mathbf{T}}\begin{bmatrix} \mathbf{H}_\theta & -\delta\mathbf{z} \\ -\delta\mathbf{z}^\mathbf{T} & 0 \end{bmatrix}\delta\bar{\mathbf{q}}^* = \delta\bar{\mathbf{q}}^\mathbf{T}\begin{bmatrix} \mathbf{H}_\theta & -\delta\mathbf{z} \\ \delta\mathbf{z}^\mathbf{T} & 0 \end{bmatrix}\delta\bar{\mathbf{q}} \quad (۱۰\text{– الف})$$

$$\mathbf{H}_\theta = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} a_i\left([\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{i}\times][\mathbf{T}\tilde{\mathbf{n}}_\mathbf{i}\times] + [\mathbf{T}\tilde{\mathbf{n}}_\mathbf{i}\times][\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{i}\times]\right) \quad (۱۰\text{– ب})$$

$$\delta\mathbf{z} = -\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} a_i(\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{i}\times\mathbf{T}\tilde{\mathbf{n}}_\mathbf{i}) \quad (۱۰\text{– ج})$$

فرم کلی مسئله مقدار ویژه همانند قبل در معادله (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{H}_\theta\delta\mathbf{q}_\mathbf{v} + \delta q_4\delta\mathbf{z} = \delta\lambda\delta\mathbf{q}_\mathbf{v} \quad (۱۱)$$

که مقدار ویژه بهینه $\delta\lambda$ مقدار کوچکی است، در حالتی که اندازه‌گیری‌ها مناسب باشند مقدار ویژه بهینه صفر است و با اضافه‌کردن نویز نتیجه نزدیک به ماتریس تکین داونپورت می‌شود. توجه داشته باشید که خطاها مقادیر کوچکی هستند ($\delta q_4 \approx 1$ و $\delta\lambda\delta\mathbf{q}_\mathbf{v} \approx 0$) و حل مسئله خطای

تخمین در حالی که مؤلفه‌های بردار خطای کواترنیون به فرم معادله (۱۲) باشند، به‌دست می‌آید:

$$\delta \mathbf{q}_{\mathbf{v}} = -\mathbf{H}_{\mathbf{\theta}}^{-1}\delta \mathbf{z} \qquad (\text{الف} -۱۲)$$

$$\delta \mathbf{\theta} = 2\delta \mathbf{q}_{\mathbf{v}} \qquad (\text{ب} -۱۲)$$

بنابراین، کوواریانس خطای وضعیت محاسبه می‌شود [۵]:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathbf{\theta\theta}} &= \mathrm{E}\left\{\delta\mathbf{\theta}\delta\mathbf{\theta}^{\mathbf{T}}\right\} = 4\mathrm{E}\left\{\delta\mathbf{q}_{\mathbf{v}}\delta\mathbf{q}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{T}}\right\} \\ &= 4\mathbf{H}_{\mathbf{\theta}}^{-1}\mathrm{E}\left\{\delta\mathbf{z}\delta\mathbf{z}^{\mathbf{T}}\right\}\mathbf{H}_{\mathbf{\theta}}^{-\mathbf{T}}\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

برای محاسبه کوواریانس $\mathrm{E}\left\{\delta\mathbf{z}\delta\mathbf{z}^{\mathbf{T}}\right\}$ با تقریب مرتبه اول داریم:

$$\begin{aligned}&\delta\mathbf{z} = -\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} a_i\left(\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{i}}\times\mathbf{T}\tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}}\right) = -\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} a_i\left[\left(\mathbf{y}_{\mathbf{i}}+\delta\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\right)\times\mathbf{T}\left(\mathbf{n}_{\mathbf{i}}+\delta\mathbf{n}_{\mathbf{i}}\right)\right] \\ &\Rightarrow \delta\mathbf{z} = -\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} a_i\left(\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\times\mathbf{T}\mathbf{n}_{\mathbf{i}}+\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\times\mathbf{T}\delta\mathbf{n}_{\mathbf{i}}+\delta\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\times\mathbf{T}\mathbf{n}_{\mathbf{i}}+\delta\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\times\mathbf{T}\delta\mathbf{n}_{\mathbf{i}}\right) \\ &\Rightarrow \delta\mathbf{z} = -\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} a_i\left(\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\times\mathbf{T}\delta\mathbf{n}_{\mathbf{i}}+\delta\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\times\mathbf{T}\mathbf{n}_{\mathbf{i}}\right)\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با این فرض معمول که هر منبع خطا با دیگری نا همبسته هستند نتیجه می‌شود که:

$$\mathrm{E}\left\{\delta\mathbf{z}\delta\mathbf{z}^{\mathbf{T}}\right\} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} a_i^2\left\{\begin{aligned}&\left[\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\times\right]\mathbf{T}\mathrm{E}\left\{\delta\mathbf{n}_{\mathbf{i}}\delta\mathbf{n}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{T}}\right\}\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\times\right]^{\mathbf{T}} + \\ &\left[\mathbf{T}\mathbf{n}_{\mathbf{i}}\times\right]\mathrm{E}\left\{\delta\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\delta\mathbf{y}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{T}}\right\}\left[\mathbf{T}\mathbf{n}_{\mathbf{i}}\times\right]^{\mathbf{T}}\end{aligned}\right\} \qquad (۱۵)$$

در عمل، وضعیت واقعی و بردارهای اندازه‌گیری نامعلوم هستند و باید با مقادیر تخمین زده‌شده و اندازه‌گیری شده $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{T}}$ و $\tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}}$ تخمین زده شوند. مهم است که توجه شود که مسئله وهبا مربع باقی‌مانده $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{i}} - \mathbf{T}\left(\hat{\bar{\mathbf{q}}}\right)\tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}}$ را کمینه می‌کند. در نتیجه تضمینی وجود ندارد که خطای کواترنیونی که از طریق این روش به دست می‌آید کمترین باشد، به‌هرحال، این روش برای به‌دست آوردن یک تخمین وضعیت بهینه مفید است.

روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته Q (qEKF)

فیلتر کالمن ابزاری پایه برای تخمین بازگشتی است. در این بخش از آن به‌عنوان چارچوبی برای توسعه الگوریتم پیشنهادی استفاده می‌شود. فیلتر qEKF[7] به‌روزرسانی وضعیت را بر پایه روش q انجام می‌دهد و سپس به‌روزرسانی حالت‌های غیروضعیت را با استفاده از تکنیک فیلتر کالمن به انجام می‌رساند. بردار حالت بهینه و به‌روزرسانی کوواریانس در ابتدا برای حالت پارتیش‌بندی شده (وضعیت و غیروضعیت) و با فرض خطی‌بودن اندازه‌گیری‌هایی که تابعی از وضعیت ماهواره هستند، به‌دست خواهد آمد. حالت بهینه خطی، با یک فیلتر کالمن به‌روزرسانی وضعیت را انجام داده و به‌عنوان اندازه‌گیری‌های جدید بکار می‌رود و حالت‌های غیروضعیت روش qEKF و به‌روزرسانی کوواریانس‌ها تعمیم حالت بهینه خطی هستند. برای توسعه الگوریتم qEKF فرض کنید بردار اندازه‌گیری $\mathbf{y}$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{\eta} \qquad (۱۶)$$

که در این رابطه بردار حالت $\mathbf{x}$، ماتریس مشاهدات $\mathbf{H}$ و نویز سفید $\mathbf{\eta}$ با میانگین صفر و با کوواریانس مرتبط $\mathbf{R}$ می‌باشند. $\hat{\mathbf{x}}^{-}$ را به‌عنوان یک تخمین پیشین حالت با کوواریانس خطای تخمین $\mathbf{P}^{-}$ تعریف می‌کنیم و $\hat{\mathbf{x}}^{+}$ نیز تخمین پسین حالت با کوواریانس خطای تخمین $\mathbf{P}^{+}$ نشان داده می‌شود، همچنین خطاهای پیشین و پسین به ترتیب به‌وسیله رابطه‌های زیر نشان داده می‌شوند:

$$\mathbf{e}^{-} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{-} \qquad (\text{الف}-۱۷)$$

$$\mathbf{e}^{+} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{+} \qquad (\text{ب} -۱۷)$$

معادله به‌روزرسانی حالت (تخمین پسین حالت) و خطای تخمین پسین حالت به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}^{+} = \left(\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{H}\right)\hat{\mathbf{x}}^{-} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}^{-} + \mathbf{K}\left(\mathbf{y}-\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^{-}\right) \qquad (\text{الف}-۱۸)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{+} &= \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{+} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{-} - \mathbf{K}\left(\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{\eta}-\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^{-}\right) \\ &= \mathbf{e}^{-} - \mathbf{K}\left(\mathbf{H}\mathbf{e}^{-}+\mathbf{\eta}\right) = \left(\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{H}\right)\mathbf{e}^{-} - \mathbf{K}\mathbf{\eta}\end{aligned} \qquad (\text{ب} -۱۸)$$

که ماتریس K بهره کالمن و $\mathbf{\eta}$ نویز اندازه‌گیری است. می‌دانیم که تخمین دارای خطایی با میانگین صفر و ماتریس کوواریانسی است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{P}^{-} = \mathrm{E}\left\{\mathbf{e}^{-}\left(\mathbf{e}^{-}\right)^{\mathbf{T}}\right\} \qquad (۱۹)$$

فرض می‌شود که خطاهای تخمین و نویز اندازه‌گیری ناهمبسته هستند، بنابراین؛ $\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}^{-}\mathbf{\eta}^{\mathbf{T}}\right\} = 0$ است. بنابراین کوواریانس خطای تخمین پسین چنین تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{+} &= \mathrm{E}\left\{\mathbf{e}^{+}\left(\mathbf{e}^{+}\right)^{\mathbf{T}}\right\} \\ &= \left(\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{H}\right)\mathbf{P}^{-}\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{H}\right)^{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که به‌عنوان فرمول جوزف برای به‌روزرسانی کوواریانس شناخته می‌شود [۱۰]. در فیلتر کالمن بهره $\mathbf{K}$ طوری انتخاب می‌شود که خطای تخمین را کمینه کند که با کمینه‌کردن trace کوواریانس خطای تخمین پسین انجام می‌شود.

$$\min_{\mathbf{K}} \operatorname{trace}\left[\mathbf{P}^{+}\right] = \operatorname{trace}\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{H}\right)\mathbf{P}^{-}\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{H}\right)^{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}\right] \qquad (۲۱)$$

7 Q-method Extended Kalman Filter

$$\frac{\partial \operatorname{trace}\left[\mathbf{P}^{+}\right]}{\partial \mathbf{K}}=0=\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}\operatorname{trace}\left[(\mathbf{I}-\mathbf{KH})\mathbf{P}^{-}(\mathbf{I}-\mathbf{KH})^{\mathbf{T}}+\mathbf{KRK}^{\mathbf{T}}\right]$$

$$0=\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}\begin{pmatrix}\operatorname{trace}\left[\mathbf{P}^{-}\right]+\operatorname{trace}\left[-\mathbf{KHP}^{-}\right]\\ +\operatorname{trace}\left[-\mathbf{P}^{-}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}\right]+\operatorname{trace}\left[\mathbf{KHP}^{-}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}\right]\\ +\operatorname{trace}\left[\mathbf{KRK}^{\mathbf{T}}\right]\end{pmatrix} \quad \text{(۲۲–الف)}$$

$$0=-2\mathbf{P}^{-}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}+2\mathbf{KHP}^{-}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}+2\mathbf{KR}$$

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{HP}^{-}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}+\mathbf{R}\right)^{-1}=\mathbf{P}^{-}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{K}_{opt}=\mathbf{P}^{-}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{HP}^{-}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}+\mathbf{R}\right)^{-1} \quad \text{(۲۲– ب)}$$

اکنون فرض کنید که علاوه بر تخمین بردار وضعیت، علاقه‌مند باشیم که متغیرهای دیگری را نیز تخمین بزنیم. فرض کنید که بردار حالت به شکل زیر تعریف شود:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \mathbf{s}\end{bmatrix} \quad \text{(۲۳)}$$

که $\boldsymbol{\theta}$ وضعیت و $\mathbf{s}$ حالت‌های غیروضعیت باشند. معمولاً، وضعیت زوایای سه‌گانه رول، پیچ و یاوو و حالت غیروضعیت بایاس ژیروسکوپ است. ماتریس مشاهده، بهره و ماتریس‌های کوواریانس به‌طور مشابه پارتیشن‌بندی می‌شوند:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{\theta} & \mathbf{H}_{s}\end{bmatrix} \quad \text{(۲۴–الف)}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\theta}\\ \mathbf{K}_{s}\end{bmatrix} \quad \text{(۲۴– ب)}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{\theta\theta} & \mathbf{P}_{\theta s}\\ \mathbf{P}_{s\theta} & \mathbf{P}_{ss}\end{bmatrix} \quad \text{(۲۴– ج)}$$

فرض می‌شود که اندازه‌گیری‌ها تابعی از وضعیت $\boldsymbol{\theta}$، و مستقل از حالت‌های غیروضعیت هستند. بهره بهینه کالمن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{opt}}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\theta,\mathbf{opt}}\\ \mathbf{K}_{s,\mathbf{opt}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}^{-}_{\theta\theta}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}_{\theta}\\ \mathbf{P}^{-}_{s\theta}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}_{\theta}\end{bmatrix}\mathbf{W}^{-1} \quad \text{(۲۵–الف)}$$

$$\mathbf{W}=\mathbf{H}_{\theta}\mathbf{P}^{-}_{\theta\theta}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}_{\theta}+\mathbf{R} \quad \text{(۲۵– ب)}$$

درنتیجه، معادله به‌روزرسانی مانده چنین تعریف خواهد شد:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{+}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{-}+\mathbf{K}_{\theta}\left(\mathbf{y}-\mathbf{H}_{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{-}\right) \quad \text{(۲۶–الف)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{y}-\mathbf{H}_{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{-} \quad \text{(۲۶– ب)}$$

همچنین می‌توان مانده را برحسب بهره کالمن و تابعی از وضعیت نوشت:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{K}^{-1}_{\theta,\mathbf{opt}}\Delta\boldsymbol{\theta} \quad \text{(۲۷–الف)}$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{+}-\hat{\boldsymbol{\theta}}^{-} \quad \text{(۲۷– ب)}$$

که $\Delta\boldsymbol{\theta}$ به‌روزرسانی وضعیت بهینه است. برای حالت‌های غیروضعیت داریم:

$$\hat{\mathbf{s}}^{+}=\hat{\mathbf{s}}^{-}+\mathbf{K}_{s}\left(\mathbf{y}-\mathbf{H}_{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}^{-}\right) \quad \text{(۲۸)}$$

با جایگذاری بهره بهینه از معادله (۲۵) و باقیمانده از معادله (۲۷) معادله جایگزین برای به‌روزرسانی حالت غیروضعیت بهینه به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\hat{\mathbf{s}}^{+}=\hat{\mathbf{s}}^{-}+\mathbf{K}_{\mathbf{s},opt}\mathbf{K}^{-1}_{\theta,\mathbf{opt}}\Delta\boldsymbol{\theta}=\hat{\mathbf{s}}^{-}+\mathbf{P}^{-}_{s\theta}\left(\mathbf{P}^{-}_{\theta\theta}\right)^{-1}\Delta\boldsymbol{\theta} \quad \text{(۲۹)}$$

برای تحلیل کوواریانس نیز مشابه قبل عمل کرده و خطای تخمین پسین حالت وضعیت و غیروضعیت به ترتیب چنین تعریف خواهد شد:

$$\mathbf{e}^{+}_{\theta}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{\theta}\mathbf{H}_{\theta}\right)\mathbf{e}^{-}_{\theta}-\mathbf{K}_{\theta}\boldsymbol{\eta} \quad \text{(۳۰– الف)}$$

$$\mathbf{e}^{+}_{s}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{s}\mathbf{H}_{s}\right)\mathbf{e}^{-}_{s}-\mathbf{K}_{s}\boldsymbol{\eta} \quad \text{(۳۰– ب)}$$

به‌روزرسانی کوواریانس خطای کوواریانس برای همه حالت‌ها بیان می‌شود:

$$\mathbf{P}^{+}=\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}^{+}\left(\mathbf{e}^{+}\right)^{\mathbf{T}}\right\}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{KH}\right)\mathbf{P}^{-}\left(\mathbf{I}-\mathbf{KH}\right)^{\mathbf{T}}+\mathbf{KRK}^{\mathbf{T}} \quad \text{(۳۱)}$$

حال به‌روزرسانی کوواریانس همه حالت‌ها را با استفاده از معادلات (۲۴)، (۲۴– ب)، (۲۴– ج) و جایگذاری بهره بهینه از معادله (۲۲– ب) و ساده‌سازی مناسب به روابط زیر خواهیم رسید:

$$\mathbf{P}^{+}_{\theta\theta}=\mathbf{P}^{-}_{\theta\theta}-\mathbf{K}_{\theta,\mathbf{opt}}\mathbf{W}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}_{\theta,\mathbf{opt}}=\mathbf{P}^{-}_{\theta\theta}\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{\theta,\mathbf{opt}}\mathbf{H}_{\theta}\right)^{\mathbf{T}} \quad \text{(۳۲–الف)}$$

$$\mathbf{P}^{+}_{\theta s}=\mathbf{P}^{-}_{\theta s}-\mathbf{P}^{-}_{\theta\theta}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}_{\theta}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}_{s,\mathbf{opt}} \quad \text{(۳۲– ب)}$$

$$\mathbf{P}^{+}_{s\theta}=\mathbf{P}^{-}_{s\theta}-\mathbf{K}_{s,\mathbf{opt}}\mathbf{H}_{\theta}\mathbf{P}^{-}_{\theta\theta} \quad \text{(۳۲– ج)}$$

$$\mathbf{P}^{+}_{ss}=\mathbf{P}^{-}_{ss}-\mathbf{K}_{s,\mathbf{opt}}\mathbf{W}\mathbf{K}^{\mathbf{T}}_{s,\mathbf{opt}} \quad \text{(۳۲– د)}$$

بعد از به‌روزرسانی وضعیت، مأموریت باقی‌مانده برای فیلتر توسعه‌یافته، به‌روزرسانی مناسب برای حالت‌های غیروضعیت است. این امر با استفاده از اطلاعات جدیدی که از به‌روزرسانی حالت‌های وضعیت به‌دست‌آمده است، انجام می‌شود. درواقع از به‌روزرسانی وضعیت $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{+}$ به‌عنوان اندازه‌گیری استفاده می‌کنیم. با این شبه‌اندازه‌گیری،[8] ماتریس $\mathbf{H}^{*}_{\theta}=\mathbf{I}_{3\times 3}$ ماتریسی همانی است و ماتریس مشاهدات حالت غیروضعیت $\mathbf{H}^{*}_{s}=0$ صفر است. بنابراین، شبه‌اندازه‌گیری بدین‌صورت داده می‌شود:

$$\mathbf{y}^{*}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{+}=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\eta}^{+} \quad \text{(۳۳–الف)}$$

$$\boldsymbol{\eta}^{+}=-\mathbf{e}^{+}_{\theta} \quad \text{(۳۳– ب)}$$

توجه شود که برای باقیمانده مقادیر این بخش از بالانویس $(.)^{*}$ برای شبه‌اندازه‌گیری استفاده می‌کنیم. در اینجا، خطای تخمین پسین $-\mathbf{e}^{+}_{\theta}$ با خطای تخمین پیشین $\mathbf{e}^{-}_{\theta},\mathbf{e}^{-}_{s}$ رابطه دارد. این ارتباط بایستی به‌طور صحیح محاسبه شود و ازاین‌رو تعریف می‌شود:

8. Pseudo-measurement

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\theta^* \\ \mathbf{C}_s^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}\left\{ e_\theta^- \left(\boldsymbol{\eta}^* \right)^{\mathbf{T}} \right\} \\ \mathrm{E}\left\{ e_s^- \left(\boldsymbol{\eta}^* \right)^{\mathbf{T}} \right\} \end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

با جایگذاری برای $\mathbf{e}_\theta^+$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\theta^* &= -\mathrm{E}\left\{ \mathbf{e}_\theta^- \left(\mathbf{e}_\theta^+ \right)^{\mathbf{T}} \right\} = -\mathrm{E}\left\{ \mathbf{e}_\theta^- \left(\mathbf{e}_\theta^- \right)^{\mathbf{T}} \right\} \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_\theta \mathbf{H}_\theta \right)^{\mathbf{T}} \\ &= -\mathbf{P}_{\theta\theta}^- \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_\theta \mathbf{H}_\theta \right)^{\mathbf{T}} \end{aligned} \tag{۳۵–الف}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_s^* &= -\mathrm{E}\left\{ \mathbf{e}_s^- \left(\mathbf{e}_\theta^+ \right)^{\mathbf{T}} \right\} = -\mathrm{E}\left\{ \mathbf{e}_s^- \left(\mathbf{e}_\theta^- \right)^{\mathbf{T}} \right\} \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_\theta \mathbf{H}_\theta \right)^{\mathbf{T}} \\ &= -\mathbf{P}_{s\theta}^- \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_\theta \mathbf{H}_\theta \right)^{\mathbf{T}} \end{aligned} \tag{۳۵– ب}$$

خواهیم داشت:

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\theta,\mathrm{opt}} \mathbf{H}_\theta \right)^{\mathbf{T}} = \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- \right)^{-1} \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ \tag{۳۶}$$

با این فرض که یک بهره وضعیت بهینه، $\mathbf{K}_{\theta,\mathrm{opt}}$ داشته باشیم، ماتریس‌های کوواریانس ساده‌سازی می‌شوند:

$$\mathbf{C}_\theta^* = -\mathbf{P}_{\theta\theta}^+ \tag{۳۷–الف}$$

$$\mathbf{C}_s^* = -\mathbf{P}_{s\theta}^+ \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- \right)^{-1} \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ \tag{۳۷– ب}$$

با توجه به معادلات فوق بهره بهینه چنین به‌دست خواهد آمد:

$$\mathbf{K}^* = \left(\mathbf{P} \mathbf{H}^{*\mathbf{T}} + \mathbf{C}^* \right) \left(\mathbf{H}^* \mathbf{P} \mathbf{H}^{*\mathbf{T}} + \mathbf{R}^* + \mathbf{H}^* \mathbf{C}^* + \mathbf{C}^{*\mathbf{T}} \mathbf{H}^{*\mathbf{T}} \right)^{-1} \tag{۳۸}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\mathbf{H}^* = \left[\mathbf{H}_\theta^{\mathbf{T}} \quad \mathbf{H}_s^{\mathbf{T}} \right] = [\mathbf{I} \quad 0]$$

$$\mathbf{R}^* = \mathrm{E}\left\{ \boldsymbol{\eta}^* \left(\boldsymbol{\eta}^* \right)^{\mathbf{T}} \right\} = \mathbf{P}_{\theta\theta}^+$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\theta^* \\ \mathbf{K}_s^* \end{bmatrix}$$

که در این روابط داریم:

$$\mathbf{K}_\theta^* = \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- + \mathbf{C}_\theta^* \right) \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- + \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ + \mathbf{C}_\theta^* + \mathbf{C}_\theta^{*\mathbf{T}} \right)^{-1} \tag{۳۹–الف}$$

$$\mathbf{K}_s^* = \left(\mathbf{P}_{s\theta}^- + \mathbf{C}_s^* \right) \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- + \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ + \mathbf{C}_\theta^* + \mathbf{C}_\theta^{*\mathbf{T}} \right)^{-1} \tag{۳۹– ب}$$

همچنین با جایگذاری و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\mathbf{K}_\theta^* = \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- - \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ \right) \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- + \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ - \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ - \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ \right)^{-1} = \mathbf{I} \tag{۴۰}$$

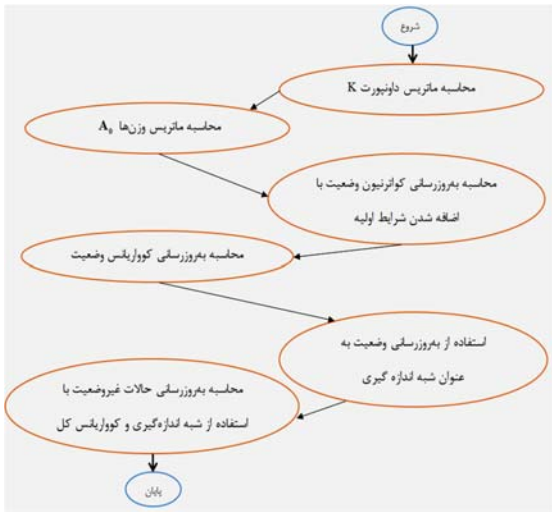
با استفاده از $\hat{\boldsymbol{\theta}}^+$ به‌عنوان یک شبه‌اندازه‌گیری، اطلاعات اضافی در مورد وضعیت به‌دست می‌آید. بهره بهینه $\mathbf{K}_s^*$ با روشی مشابه به‌وسیله جایگزینی مقادیر مناسب برای $\mathbf{C}_\theta^*, \mathbf{C}_s^*$ و $\mathbf{P}_{\theta\theta}^+$ به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s^* &= \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- - \mathbf{P}_{s\theta}^- \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- \right)^{-1} \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ \right) \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- + \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ - \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ - \mathbf{P}_{\theta\theta}^+ \right)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_{s\theta}^- \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\theta,\mathrm{opt}} \mathbf{H}_\theta \right)^{\mathbf{T}} \right] \left[\mathbf{P}_{\theta\theta}^- \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\theta,\mathrm{opt}} \mathbf{H}_\theta \right)^{\mathbf{T}} \right) \right]^{-1} \\ &= \mathbf{P}_{s\theta}^- \mathbf{H}_\theta^{\mathbf{T}} \mathbf{K}_{\theta,\mathrm{opt}}^{\mathbf{T}} \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- \mathbf{H}_\theta^{\mathbf{T}} \mathbf{K}_{\theta,\mathrm{opt}}^{\mathbf{T}} \right)^{-1} = \mathbf{P}_{s\theta}^- \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- \right)^{-1} \end{aligned} \tag{۴۱}$$

و به‌روزرسانی حالت غیروضعیت نیز به شکل زیر انجام می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}^* &= \hat{\mathbf{s}}^- + \mathbf{K}_s^* \left(\mathbf{y}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}^- \right) = \hat{\mathbf{s}}^- + \mathbf{K}_s^* \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^+ - \hat{\boldsymbol{\theta}}^- \right) \\ &= \hat{\mathbf{s}}^- + \mathbf{P}_{s\theta}^- \left(\mathbf{P}_{\theta\theta}^- \right)^{-1} \Delta\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \tag{۴۲}$$

در انتهای این بخش به صورت شماتیک، فرایند اجرای این الگوریتم در شکل ۲ معرفی شده است:



شکل ۲– فرایند اجرای الگوریتم پیشنهادی

شبیه‌سازی تخمین وضعیت ماهواره با استفاده حسگرهای خورشیدی و مغناطیسی و با استفاده از الگوریتم qEKF

در این بخش با انجام شبیه‌سازی برای یک ماهواره فرضی در مدار نزدیک به زمین، عملکرد الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته و عملکرد آن را با الگوریتم SOAR مقایسه می‌شود. پارامترهای شبیه‌سازی در جدول ۲ ارائه‌شده است. مرکز زمین به‌عنوان مرکز دستگاه مختصات مرجع در نظر گرفته می‌شود و دستگاه اینرسی و دستگاه بدنه ماهواره، دستگاه‌های مورد استفاده برای محاسبه وضعیت هستند.. با فرض غیرفعال بودن زیرسیستم کنترل وضعیت ماهواره، اندازه سرعت زاویه‌ای آن در هر سه محور حرکتی، ثابت فرض می‌شود که بردار سرعت در طول مسیر تغییر جهت می‌دهد. ماهواره دارای حسگرهای خورشید، مغناطیسی و ژیروسکوپ است. فرض می‌شود که بردارهای واقعی میدان مغناطیسی و خورشید در دسترس است و بردارهای اندازه‌گیری آغشته به نویز است که در جدول ۲، پارامترهای شبیه‌سازی ارائه‌شده است. وزن‌های اسکالر مسئله وهبا با درنظرگرفتن مدل اندازه‌گیری QUEST به‌صورت $1/\sigma_{\mathrm{sun}}^2$

و $1/\sigma_{mag}^2$ به ترتیب برای حسگر خورشید و حسگر مغناطیس‌سنج انتخاب می‌گردند بردار حالت شامل زوایای غلت، فراز و سمت ماهواره و بایاس ژیروسکوپ است.

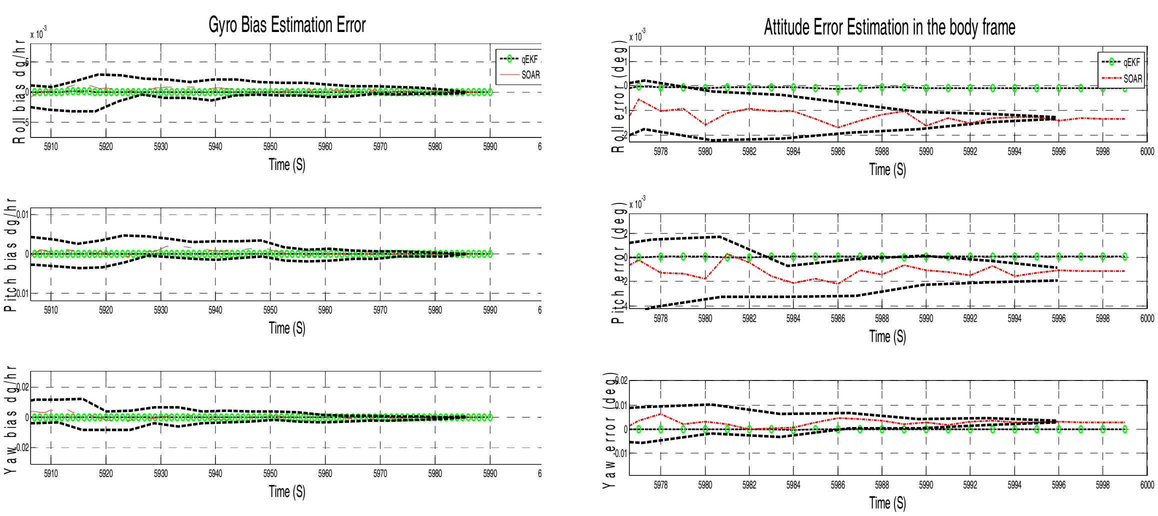
جدول ۲- پارامترهای شبیه‌سازی

نویز حسگر خورشید	σ_{sun}	۰/۱ درجه
نویز حسگر مغناطیسی	σ_{mag}	۲۲۰ نانو تسلا
نویز ژیرو (Angular Random Walk)	σ_v	$3.3\times10^{-7}\ rad/sec^{.5}$
بایاس ژیرو (Angular Random Walk)	σ_u	$3.3\times10^{-10}\ rad/sec^{1.5}$
بردار حالت	$\boldsymbol{x}=[\theta\quad s]^T$	زوایای اویلر و بایاس سه ژیرو
زمان نمونه‌برداری	T_s	یک ثانیه
زمان شبیه‌سازی	T_f	۶۰۰۰ ثانیه
مدار ماهواره		• مدار دایروی در فاصله ۶۲۲ کیلومتری از سطح زمین • صفحه مداری ۴۵ درجه

با سه مثال، عملکرد الگوریتم پیشنهادی در تخمین وضعیت ماهواره و تخمین بایاس ژایروها موردبررسی و مقایسه یا دیگر روش‌ها قرار می‌گیرد. ازآنجاکه سرعت زاویه‌ای ماهواره ثابت فرض شده است، در ارائه نتایج تنها خطای تخمین وضعیت موردتوجه قرارگرفته است.

مثال اول: تعیین وضعیت با استفاده از حسگرهای مغناطیسی و خورشیدی

در این مثال فرض می‌شود که در تمام دوره مداری به‌صورت سنکرون از داده‌های حسگرهای مغناطیسی و خورشید استفاده‌شده و تخمین بایاس ژایرو و زوایای غلت، فراز و سمت ماهواره با استفاده از الگوریتم qEKF انجام می‌گیرد. برای مقایسه نتایج با الگوریتم SOAR نیز مقایسه می‌شود. نتایج این شبیه‌سازی در شکل ۲ ارائه‌شده است. در شکل ۲-الف، خطای تخمین وضعیت و در شکل ۲- ب، خطای تخمین بایاس ژایروها ترسیم‌شده است. در این شکل‌ها منحنی با رنگ مشکی نشان دهنده پوش حداکثر خطای تخمین در یکصد اجرای مختلف الگوریتم است. بررسی این شکل‌ها نشان‌دهنده عملکرد تقریباً مشابه دو الگوریتم فوق با فرض در اختیار داشتن داده‌های دو حسگر مغناطیسی و خورشید در کل مدار ماهواره است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود باگذشت زمان و پیشرفت الگوریتم، خطای تخمین برای هر سه پارامتر غلت، فراز و سمت به صفر میل می‌کند. همچنین خطای بایاس نیز به صفر میل کرده و نشان‌دهنده عملکرد مناسب‌تر تخمین حالت بایاس ژایرو توسط روش qEKF نسبت به روش SOAR است.



الف: خطای تخمین وضعیت

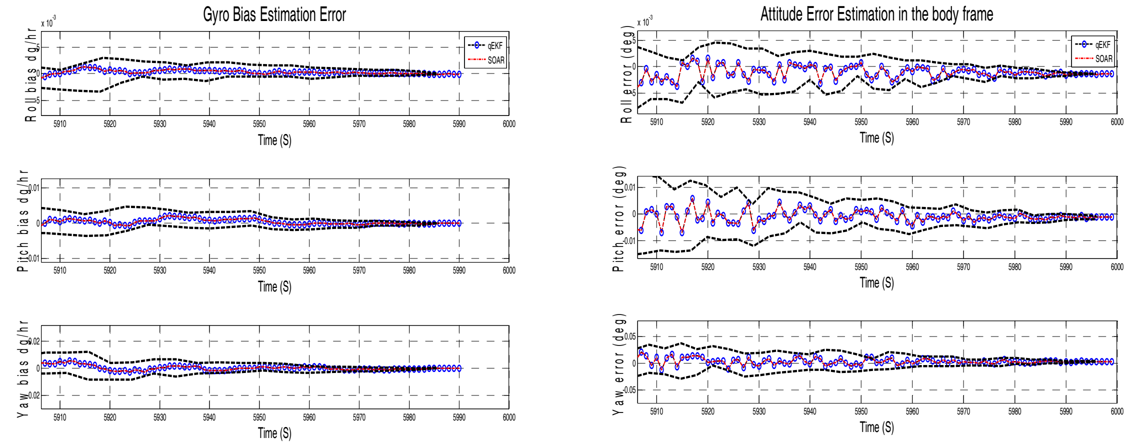
ب: خطای تخمین بایاس ژایروها

شکل ۲- خطای تخمین وضعیت و بایاس ژایرو با استفاده از دو روش qEKF و SOAR در مثال-۱

مثال دوم: تعیین وضعیت با حسگر مغناطیس‌سنج

در این مثال فرض شده است که تنها از حسگر مغناطیسی برای تعیین وضعیت استفاده گردد. در این مثال داده حسگر خورشید به‌صورت یک بردار ثابت و در واقع برداری ایده‌آل در نظر گرفته‌شده است. نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی و روش SOAR برای این مثال در شکل ۳ نمایش داده‌شده است. در شکل ۳-الف خطای تخمین وضعیت و در شکل ۳- ب خطای تخمین بایاس ژایروها برای دو روش qEKF و SOAR ارائه‌شده است. شکل ۳ نشان‌دهنده میل‌کردن خطای تخمین وضعیت به صفر هم‌زمان با پیشرفت الگوریتم است. در شکل ۳-ب نیز مشخص است که

خطای تخمین بایاس ژایروها نیز به‌تدریج به صفر همگرا شده است. در واقع این مثال نشان‌دهنده این موضوع است که در صورت اختیار داشتن داده‌های دقیق از دو حسگر، هر دو الگوریتم‌ها قادر هستند با دقت خوبی وضعیت و بایاس ژایروها را تخمین بزنند و در این شرایط عملکرد این دو الگوریتم تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد.



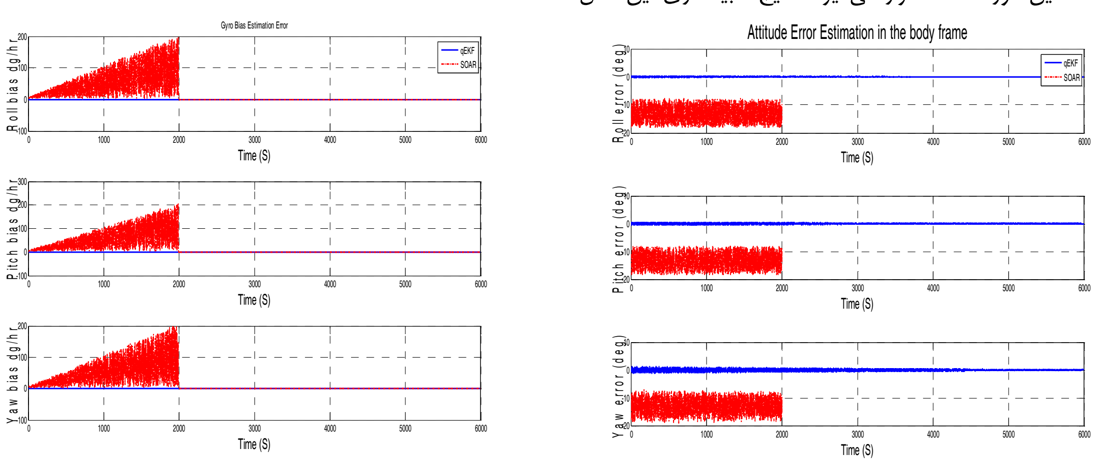
الف: خطای تخمین وضعیت

ب: خطای تخمین بایاس ژایروها

شکل ۳– خطای تخمین وضعیت و بایاس ژایروها با استفاده از دو روش qEKF و SOAR در مثال

مثال سوم: اندازه‌گیری آسنکرون با استفاده از حسگر مغناطیسی و حسگر خورشید

در این مثال اندازه‌گیری‌های انجام‌شده توسط حسگرهای مغناطیسی و حسگر خورشیدی به دلیل وقوع کسوف، در بخشی از مدار ماهواره هم‌زمان نیستند. در فاصله زمانی بین ۲۰۰۰ تا ۳۸۰۰ ثانیه (از ۶۰۰۰ نمونه) داده‌ای از حسگر خورشیدی به علت وقوع کسوف موجود نیست و ازاین‌رو در این بازه زمانی، تخمین صرفاً بر اساس داده‌های حسگر مغناطیسی انجام می‌گیرد. پس از این بازه زمانی و با خارج‌شدن ماهواره از سایه زمین، داده‌های حسگر خورشیدی نیز برای تخمین مورداستفاده قرار می‌گیرد. نتایج شبیه‌سازی این مثال در شکل ۴ ترسیم‌شده است. در شکل ۴-الف، خطای تخمین وضعیت ماهواره و در شکل ۴-ب، خطای تخمین بایاس ژایروها ترسیم‌شده است. در هر دو شکل مشخص است که روش پیشنهادی عملکرد بسیاری بهتری نسبت به الگوریتم SOAR به‌خصوص در شرایطی که ماهواره در سایه زمین است، دارد. در واقع روش SOAR به دلیل آن‌که روشی تکراری است، بدون داده حسگر خورشید قابل‌استفاده نخواهد بود. این مثال به‌خوبی نشان‌دهنده برتری روش پیشنهادی در تخمین حالت‌های وضعیت و غیروضعیت ماهواره با استفاده از داده‌های حسگر مغناطیسی و ژایروها نسبت به روش‌های قطعی یا گام‌به‌گام است.



الف: خطای تخمین وضعیت

ب: خطای تخمین بایاس ژایروها

شکل ۴– خطای تخمین وضعیت و بایاس ژایرو با استفاده از دو روش qEKF و SOAR در مثال ۳

جمع‌بندی

محدودیت‌های دو روش تعیین وضعیت قطعی و تکراری باعث شده است که ایده ترکیب این دو روش برای توسعه الگوریتم‌های تعیین وضعیت مورد توجه محققان این حوزه قرار گیرد. از ایده فیلتر کالمن توسعه‌یافته به‌عنوان روشی تکراری و روش Quest به‌عنوان روشی قطعی برای توسعه الگوریتم qEKF بهره گرفته‌شده است که در این مقاله کاربرد این روش برای تعیین وضعیت ماهواره در مدارهای نزدیک به زمین و با استفاده از حسگرهای مغناطیسی و خورشیدی مورد ارزیابی قرارگرفته است. علاوه بر این، روش‌های قطعی کارایی مناسبی در تخمین حالت‌های غیروضعیت مانند بایاس ژایروها را ندارند و روش پیشنهادی برای این چالش نیز غلبه می‌کند. مبانی ریاضی موضوع در این مقاله به‌تفصیل مورد بررسی قرارگرفت و معادلات الگوریتم qEKF برای تخمین هم‌زمان حالت‌های وضعیت و غیر وضعیت استخراج شد. با انجام شبیه‌سازی‌های مختلف، که تاثیر شرایط مختلف عملکردی ماهواره را بر زیرسیستم تعیین وضعیت شبیه‌سازی می‌کنند، عملکرد این روش مورد ارزیابی قرار گرفت. مقایسه نتایج با روش SOAR به‌عنوان یکی از روش‌های کارا در تعیین وضعیت ماهواره نشان‌دهنده عملکرد قابل‌قبول روش پیشنهادی برای تعیین وضعیت ماهواره با استفاده از حسگرهای خورشیدی و مغناطیسی در قیاس با دیگر روش‌ها دارد. روش پیشنهادی حتی در زمان قرارگیری ماهواره در سایه خورشید نیز عملکرد قابل قبولی دارد و این عملکرد مناسب در تخمین بایاس ژایروها نیز تداوم دارد. ازاین‌رو می‌توان با استفاده از این الگوریتم، تعیین وضعیت ماهواره را مدارهای نزدیک به زمین با دقت قابل قبولی انجام داد بدون این‌که نیازی باشد تا بین الگوریتم‌های قطعی و تکراری سوئیچ کرد.

مراجع

[1] J. C. Springmann, "Satellite Attitude Determination with Low-Cost Sensors," 2013.

[2] A. Hossein Adami and M. Nosratollahi, "Introducing of Attitude Determination System of a LEO Satellite with Orbital Maneuver Mission," *Journal of Space Sciense and Technology (JSST)*, vol 4. no. 4, pp. 1-10, 2012.

[3] P. Moonjelly, M. Ambalavanan, D. Filmer, and J. Longuski, "Development of a low-cost, low-power attitude determination system for a nano-satellite," in *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, 2018, p. 6933.

[4] B. Hou, Z. He, H. Zhou, and J. J. I. C. J. o. A. S. Wang, "Integrated design and accuracy analysis of star sensor and gyro on the same benchmark for satellite attitude determination system," vol. 6, no. 4, pp. 1074-1080, 2019.

[5] S. Judd *et al.*, "Attitude determination and control system (ADCS), sun sensor, and star tracker," ed: Google Patents, 2019.

[6] S. Sabzevari, A. Vali, M. H. Ferdowsi, M. R. J. I. R. Arvan, Sonar, and Navigation, "Observability analysis and design of two nested filters for the satellite attitude estimation with magnetometer-only," vol. 14, no. 4, pp. 607-618, 2020.

[7] T. N. T. Nguyen, K. L. Cahoy, and M. K. Quadrino, "Attitude determination using earth horizon sensors," ed: Google Patents, 2019.

[8] A. M. Tavakoli, A. Faghihi and S. Mohammad M. Dehghan, "Sun Vector and Magnetic Vector Simulation for Hardware in the Loop Tests," vol. 10, no. 1, pp. 47-53, 2017.

[9] M. H. J. N. Y. Kaplan, John Wiley and I. Sons, . 427 p., "Modern spacecraft dynamics and control," 1976.

[10] T. Ainscough, R. Zanetti, and J. Christian, "Q-Method Extended Kalman Filter," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 38, pp. 752-760, 04/01 2015.

[11] H. D. J. A. j. Black, "A passive system for determining the attitude of a satellite," vol. 2, no. 7, pp. 1350-1351, 1964.

[12] G. Wahba, "A least squares estimate of satellite attitude," *SIAM Review*, vol. 7, no. 3, pp. 409-409, 1965.

[13] J. Keat, "Analysis of least-squares attitude determination routine DOAOP," Technical Report CSC/TM-77/6034, Comp. Sc. Corp1977.

[14] X. Chen, L. Cao, P. Guo, and B. J. I. T. Xiao, "A higher-order robust correlation Kalman filter for satellite attitude estimation," 2019.

[15] N. Li, W. Ma, W. Man, L. Cao, and H. J. T. J. o. N. Zhang, "Multiple Robust High-degree Cubature Kalman Filter for Relative Position and Attitude Estimation of Satellite Formation," *Published online by Cambridge University Press*, vol. 72, no. 5, pp. 1254-1274, 2019.

[16] A. Junoh, S. Yaacob, M. Hasan, and N. Hamzah, "The study of particle filter for satellite angular rate estimation without rate sensor measurement," *MATEC Web of Conferences*, vol. 150, 2018.

[17] C. Hajiyev and D. M. Guler, "Review on gyroless attitude determination methods for small satellites," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 90, pp. 54-66, 2017.