JSST
10.22034/jsst.2021.1296 Vol. 14/ Issue 3/ 2021 (No. 48)
pp. 51-63

Research Paper

Dynamic and Stability Analysis of a Cracked Rotating Flexible Beam

Milad Azimi[1*], and Samad Moradi[2]

1. Aerospace Research Institute, Ministry of Science, Technology and Research, Tehran, Iran

2. Department of Engineering, Islamic Azad University, North Tehran Branch, Tehran, Iran

*** azimi.m@ari.ac.ir**

The free and forced vibration analysis of a rotating large flexible structure with a single crack is investigated using the Homotopy Perturbation Method (HPM). The crack is modeled with a torsional spring element on a structure that follows the Euler-Bernoulli theory. The nonlinear equations of motion of the co-rotational system considering centrifugal forces are derived using the calculus of variation and the Assumed Mode Method (AMM). Applying the Galerkin method, the spatial domain is extracted and the time domain is transformed into a second-order nonlinear differential equation. The results of time response, phase plane, and bifurcation diagrams for different functional parameters variations such as base angular velocity, crack position and stiffness have been analyzed. Moreover, it is shown that as the base angular velocity increases, a tensile force appears along the cracked structure axis, stiff it, and shifts the backbone to the right, this can highly affect the nonlinear features of the system.

Keywords: Assumed Mode Method, Crack, Homotopy perturbation, Nonlinear vibration, Stability analysis

1. Assistant Professor (Corresponding Author).
2. M.Sc.

Received: 2020.08.21/ Accepted: 2020.10.14/ Publish Online: 2021.10.01/ Online ISSN: 2423-4516 / Print ISSN: 2008-4560

دوره ۱۴ / شمارهٔ ۳/ پاییز ۱۴۰۰ (شماره پیاپی ۴۷) DOI: 10.22034/JSST.2021.1296
ص. ص . ۶۳- ۵۱

JSST
فصلنامهٔ علمی - پژوهشی علوم و فناوری فضایی

مقاله علمی- پژوهشی

تحلیل دینامیکی و بررسی پایداری تیر انعطاف‌پذیر ترک‌دار متصل به پایه چرخان

میلاد عظیمی[1]*و صمد مرادی[2]

۱- پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری تهران، ایران

۲- دانشکدهٔ فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شمال، تهران، ایران

***azimi.m@ari.ac.ir**

در این مقاله رفتار ارتعاشات آزاد، اجباری، و پایداری یک سازه انعطاف‌پذیر ترک‌دار بلند با پایه چرخان با استفاده از روش هوموتوپی پرتوربیشن مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. ترک در مسئله حاضر با فرض المان فنر پیچشی بدون وزن بر روی سازه با پایه چرخان (که رفتار آن از تئوری اویلر برنولی تبعیت می‌کند) مدلسازی شده است. معادلات غیرخطی حرکت سیستم با لحاظ تغییرشکل‌های خارج صفحه‌ای و نیروهای گریز از مرکز و با به‌کارگیری حساب تغییرات و روش مودهای فرضی استخراج شده است. با اعمال روش گلرکین، بُعد مکانی مسئله استخراج و بعد زمانی به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی در حوزه زمان تبدیل می‌شود. نتایج به ازاء تغییر پارامترهای مهم مساله از جمله سرعت دوران پایه، موقعیت و سفتی ترک، شرایط اولیه و دامنه تحریک در قالب نمودارهای پاسخ زمانی، نمودار فازی و دوشاخگی بررسی و تحلیل شده است. نشان داده شده است که با افزایش سرعت زاویه‌ای، یک نیروی کششی در امتداد محور سازه ایجاد شده که منجر به استحکام تیر ترک خورده، حرکت نمودار دوشاخگی به‌سمت راست و تغییر رفتار غیرخطی سیستم می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات غیرخطی، تحلیل پایداری، هوموتوپی پرتوربیشن، ترک، مودهای فرضی

علائم و اختصارات

سطح مقطع	A
فاصله از ریشه تا ترک	a
مدول الاستیسیته	E
ممان اینرسی	I
سفتی ترک	k
طول سازه	l
اپراتور خطی	ℓ
اپراتور غیرخطی	N
انرژی جنبشی	T
انرژی پتانسیل	U
تغییر شکل در راستای z	w
کرنش	ε
تغییر شکل در راستای y	υ
چگالی	ρ
تنش	σ
سرعت دوران	Ω
فرکانس طبیعی	ω

مقدمه

سازه‌های با پایه چرخان به‌طور گسترده‌ای در صنایع حساسی چون هوافضا (فضاپیماهای مجهز به وصله‌های انعطاف‌پذیر مانند آنتن‌ها، پنل‌های خورشیدی، بوم‌ها و ...، هلی‌کوپترها، هواپیماها)،

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)
۲. کارشناس ارشد

دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۵/۳۱ ، پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۷/۲۳ / چاپ الکترونیکی: ۱۴۰۰/۰۷/۰۱/ شاپای الکترونیکی: ۴۵۱۶-۲۴۲۳ / شاپای چاپی: ۴۵۱۶-۲۰۰۸

توربوماشین‌ها، روباتیک و ... مورد استفاده و کاربرد قرار می‌گیرد. امروزه شناسایی رفتار ارتعاشی، دینامیکی و مشخصه‌های پایداری این سامانه‌ها به عنوان یک نیازمندی اساسی مطرح می‌شود. بررسی هرچه دقیق‌تر اثرات نامطلوبی مانند ترک در تعامل با این دینامیک پیچیده می‌تواند طراحان را در شناسایی رفتارهای ارتعاشی، که مؤثر بر عملکرد سیستم است، یاری نماید. رفتار ارتعاشی و مشخصه‌های مودال این سازه‌ها متاثر از حرکات کلی سیستم است [۱-۴]. به‌طوری‌که اثر نیروهای اینرسی گریز از مرکز می‌تواند باعث کشیدگی سازه و افزایش سفتی خمشی آن شود درحالی‌که اثرات کوریولیس منجر به کوپلینگ‌های ارتعاشی میان مودهای مختلف ارتعاشی و تولید شکل مودهای پیچیده می‌شود.

برای مدلسازی هرچه دقیق‌تر رفتار دینامیکی و ارتعاشات با دامنه بزرگ سازه‌های انعطاف‌پذیر، باید سراغ روش‌های مدلسازی و رویکردهای غیرخطی رفت [۵-۷]. بسیاری از مسائل در ارتعاشات غیرخطی، روش‌های تحلیلی دقیقی را ارائه نمی‌دهند. یکی از گام‌های اساسی در تئوری ارتعاشات غیرخطی، تعیین معیارهای کافی برای تضمین وجود پاسخ‌های پریودیک است. اگر سیستمی به واسطه نیروی پریودیک تحریک شود، در تئوری‌های کلاسیک انتظار می‌رود که پاسخ سیستم نیز پریودیک باشد. همچنین، تئوری تشدید غیرخطی مبتنی بر فرض خروجی‌های پریودیک به واسطه ورودی‌های پریودیک می‌باشد. روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی، فرایند محاسبه ضرایب فوریه، استفاده از قضایای نقطه ثابت[3] و تکنیک سری‌های توانی، چهار روش متداول برای تعیین پاسخ‌های پریودیک می‌باشند [۸-۱۱].

از روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی می‌توان به‌عنوان تکنیک‌های مطلوب، با دقت بالا برای تعیین مشخصه‌های دینامیکی سیستم‌های پیچیده (با لحاظ هزینه‌های محاسباتی) نام برد. با بررسی‌های صورت گرفته، مشاهده می‌شود که مطالعات اندکی در حوزه سازه‌های با پایه چرخان حاوی ترک با ملاحظات رفتار غیرخطی، با استفاده از روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی انجام شده است. اگرچه تعداد تحقیقات گسترده‌ای برای بررسی اثرات سرعت دوران بر ارتعاشات سازه‌های یکسرگیردار صورت پذیرفته است. این مطالعات به این جمع‌بندی رسیده‌اند که فرکانس طبیعی سازه‌های با پایه چرخان بیش از سازه‌های ثابت بوده، و دلیل آن را اثرات نیروهای گریز از مرکز ارزیابی کرده‌اند [۱۲, ۱۳].

مدلسازی‌های تحلیلی ترک، سرعت‌های مختلف دوران پایه، شعاع پایه چرخان، عمق ترک، مکان ترک در رفتار ارتعاشی این سازه بررسی خواهد شد. کلیه مدلسازی‌های تحلیل با استفاده از یک بستر آزمایشگاهی با حضور نمونه‌های سازه سالم و معیوب صحه‌گذاری خواهند شد [۱۴].

یاشار[4] و همکاران به تحلیل و مدلسازی تیر اویلر- برنولی چرخان ترک‌دار پرداختند. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی در امتداد فلپ و کُرد[5] سازه ترک‌دار با پایه چرخان با روشی مبتنی بر محاسبه تغییر شکل‌های عرضی (به واسطه تعیین اختلاف انرژی پتانسیل سازه بدون ترک از انرژی پتانسیل یک فنر پیچشی بدون جرم) حاصل شد. همچنین در این مقاله سفتی گریز از مرکز به دلیل دوران پایه، به عنوان یک ترم سفتی اضافی در معادلات در نظر گرفته شده است [۱۵] .

پانیگراهی[6] و همکاران به بررسی اثر ترک در ارتعاشات غیرخطی خمشی تیر تیموشنکو با پایه چرخان با دامنه حرکت بزرگ پرداختند. آنها اثر سفتی ناشی از دوران ارتعاشات غیرخطی تیر تیموشنکو ترک خورده متصل به یک هاب چرخان را برای اولین بار بررسی کردند. در این روش بجای ترک از یک فنر پیچشی استفاده شد که سازه را به دو بخش تقسیم می‌کرد. معادلات حرکت سیستم با استفاده از روش کلاسیک ریلی-ریتز[7] استخراج شد. در این مقاله همچنین اثر پارامترهای مختلف مانند سرعت دوران، شعاع هاب، عمق ترک و محل ترک مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۶].

پانچور[8] و همکاران از روش اجزا محدود و گالرکین برای استخراج فرم ضعیف معادلات حرکت و تحلیل ارتعاشات آزاد تیر اویلر برنولی متصل به پایه چرخان استفاده کردند [۱۷]. لاتالسکی[9] و همکاران به بررسی ارتعاشات خمشی تیر کامپوزیتی نازک متصل به هاب چرخان پرداختند. دینامیک سیستم با لحاظ اثرات ناهمسانگردی، اینرسی دورانی و برش عرضی در مدل ریاضی مسئله در نظر گرفته شده است. علاوه‌براین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حرکت کوپل خمشی- کششی سازه چرخان با استفاده از اصل همیلتون و روش گالرکین کاهش مرتبه یافته است [۱۸].

کیتیپورنچای[10] و همکاران ارتعاشات غیرخطی تیر تیموشنکو ترک‌دار را به صورت تجربی مورد بررسی قرار دادند. ترک را از روش ریتز مدلسازی کرده و سپس یک روش حل مستقیم برای تعیین فرکانس‌های غیرخطی ارتعاشات این سازه حاوی ترک ارائه دادند و نهایتاً به بررسی عمق ترک، محل

3. Fixed Point Theory

4. Yashar
5. Chord
6. Panigrahi
7. Rayleigh-Ritz
8. Panchore
9. Latalski
10. Kitipornchai

ترک، و نسبت ضریب اطمینان پرداختند [۱۹]. خدایی[11] و همکاران تحلیل تئوری و تجربی ارتعاشات کششی تیر با پایه چرخان را مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله ارتعاشات پیچشی- خمشی تیر با چرخش ثابت پایه مورد ارزیابی قرار گرفت. در تحلیل‌ها از پیزوالکتریک‌ها برای تحریک تیر در فرکانس‌های مختلف استفاده شد. حسگرها فرکانس‌های طبیعی سازه را نیز تغییر دادند. برای بررسی تأثیر بیشتر پایه چرخان بر ارتعاشات خمشی، آزمایش‌های متعددی در غیاب پیزوالکتریک نیز انجام شده است [۲۰].

کاراگاچ[12] و همکاران به بررسی ارتعاشات آزاد یک تیر نازک ترک‌دار به صورت تجربی و عددی پرداختند. در این مقاله اثرات موقعیت ترک‌ها بر فرکانس‌های اصلی و بارهای خمشی تیر اویلر- برنولی مورد بررسی قرار گرفت [۲۱]. گاریلوک[13] و همکاران به بررسی پاسخ دینامیکی یک تیر کامپوزیتی متصل به پایه چرخان در سرعت ثابت ناشی از تحریک هارمونیکی با موتور متحرک MFC[14] پرداختند. تیر در نظر گرفته شده با مقطع مستطیلی در هر مقطع، از مواد خاصی مانند کامپوزیت و لمینت و ... تشکیل شده است. از مواد پیزوالکتریک برای ایجاد اثر و تحریک سیستم استفاده شده است. این مسئله با تکنیک اجزای محدود گسسته‌سازی شده و نمونه‌های انتخابی به‌صورت آزمایشگاهی مورد تحلیل قرار گرفته است. تحلیل‌ها در ۲ قالب صورت پذیرفته است: ۱. عملگر MFC با ولتاژ هارمونیک ۲. منبع تحریک نیروی عرضی در انتهای تیر با سرعت دورانی ثابت به عنوان نیروی گریز از مرکز [۲۲].

چن[15] و همکاران پارامترهای ارتعاشی یک تیر کامپوزیتی با پیش پیچ‌خوردگی[16] متصل به پایه چرخان را تعیین کردند. در این تحقیق اثرات نیروی کوریولیس و نیروی گریز از مرکز در معادلات در نظر گرفته شده است. براساس روش ریلی‌ریتز و توابع چند جمله‌ای جبری که شرایط مرزی را ارضاء می‌کنند فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم استخراج شده و بررسی جامعی از اثرات ابعاد، زاویه، سرعت دوران و شعاع هاب بر تغییرات ویژگی‌های مودال صورت پذیرفته است [۲۳].

افشاری[17] و اینمن[18] به مدلسازی ارتعاشات تیر اویلر- برنولی مجهز به وصله‌های پیزوالکتریک با ترک پیوسته پرداختند. آنها با قرار دادن عملگر پیزوالکتریک بر روی تیر، اثر رشد ترک را بررسی کردند. در این مدلسازی، استفاده از تکنیکی که در آن ترک را به‌عنوان یک فنر پیچشی مدلسازی می‌کنند نمی‌توان پیاده‌سازی کرد (ترک به صورت پیوسته مدلسازی شده است) [۲۴].

آن[19] و همکاران به تحلیل دینامیک سیستم تیر متصل به هاب صلب پرداختند. دامنه حرکتی این سیستم بزرگ و دو روش سفتی متغیر پایدار و ناپایدار بررسی شده است. اگرچه روش اول ساده‌تر بوده اما می‌تواند دینامیک پیچیده را مدل کرده و دامنه ارتعاشات را پیش‌بینی کند. با این وجود با توجه به سفتی متغیر، رفتارهایی مانند تشدید مشاهده می‌شود، به طوری که دامنه در ابتدا با زمان افزایش می‌یابد و پس از آن متوقف شده و ثابت می‌شود [۲۵].

به‌طورکلی استخراج پاسخ دقیق برای مسائل غیرخطی مشکل و گاهاً غیر ممکن است. روش‌های تحلیلی/ نیمه تحلیلی متعددی در تحلیل سیستم‌های ارتعاشی مورد استفاده قرار گرفته است [۲۶, ۲۷]. روش پرتوربیشن[20] یکی از روش‌های معروف برای حل مسائل غیرخطی است که مبتنی‌بر وجود پارامترهای کوچک تحت عنوان اندازه اغتشاشات در معادلات است. از آنجاکه بسیاری از معادلات غیرخطی شامل این پارامتر نیستند، برای استخراج پاسخ آنها روش‌های به‌روزتری مانند روش بیشینه- کمینه[21]، روش توازن انرژی[22]، روش توازن هارمونیک[23]، روش هوموتوپی پرتوربیشن، روش‌های هی[24]، روش پارامتر توسعه یافته[25] و روش اصلاح شده لیندستت پونکیر[26] را نام برد.

از تمام روش‌های بررسی شده، روش هوموتوپی پرتوربیشن یک رویکرد ریاضی با دقت بالاست که برای رفع مشکلات حل معادلات غیرخطی به کار برده می‌شود [۲۸-۳۱]. مشکل نسخه‌های اولیه پرتوربیشن، فرض یک عدد کوچک در ساختار روابط بوده که می‌بایست منطبق با فیزیک مسئله باشد [۳۲]. وجود این محدودیت (انطباق‌پذیری فیزیک مسئله با عدد پرتوربیشن) شدیداً کاربرد این روش‌ها را محدود می‌سازد [۳۳].

هدف این مقاله، توسعه یک رویکرد قابل اطمینان مبتنی بر روش هوموتوپی پرتوربیشن برای مدل غیرخطی یک سازه ترک‌دار متصل به هاب چرخان در قالب یک مطالعه مقایسه‌ای است. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی سیستم با استفاده از روش گالرکین تبدیل به معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی

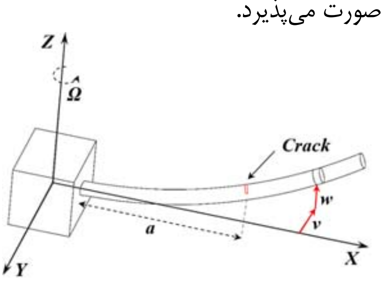
11. Khodaei
12. Karaagac
13. Gawryluk
14. Macro Fiber Composite
15. Chen
16. Pre-Twisted
17. Afshari
18. Inman
19. An
20. Homotopy Perturbation
21. Max-Min approach (MMA)
22. Energy Balance Method (EBM)
23. Harmonic Balance Method (HBM)
24. He's Approaches (Variational, Frequency amplitude)
25. Parameter Expansion Method (PEM)
26. Modified Lindstedt-poincare Method (MLPM)

شده‌اند. سپس پاسخ این معادلات با استفاده از روش هوموتوپی پرتوربیشن استخراج شده است. به طور کلی استفاده از تکنیک (هوموتوپی پرتوربیشن) در شناسایی رفتار ارتعاشی و تحلیلی پایداری سیستم‌هایی که رفتار دینامیکی پیچیده‌ای دارند (سازه-های ترک‌دار با پایه چرخان) از جمله نکات بدیع این مقاله به شمار می‌رود. پارامترهای اساسی موثر بر پایداری سیستم در قالب نمودارهای پاسخ زمانی، نمودار فازی و نمودارهای دوشاخگی برای دو حالت ارتعاشات آزاد و اجباری مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. از جمله سایر نکات اصلی و برجسته که در این مقاله به آن پرداخته شده عبارتند از: مدلسازی دوبعدی تیر اویلر-برنولی متصل به پایه چرخان، تحلیل پایداری تیر ترک‌دار با پایه چرخان و پیاده‌سازی روش هوموتوپی پرتوربیشن با جابجایی مرتبه بالا[27] (HDHPT) برای تحلیل دینامیکی تیر با پایه چرخان با لحاظ اثرات سفت کنندگی نیروی گریز از مرکز.

ساختار مقاله به این صورت می‌باشد که در بخش دوم مدل دینامیک سازه با پایه چرخان ترک دار با لحاظ نیروهای گریز از مرکز توصیف شده و پاسخ معادلات حرکت توسط تکنیک هوموتوپی پرتوربیشن استخراج شده است. بخش سوم به ارائه شبیه‌سازی‌ها و مقایسه نتایج در قالب پارامترهای موثر می‌پردازد و نهایتا مقاله با ارائه نتیجه‌گیری به اتمام رسیده است.

مدل‌سازی ریاضی

سازه تیر اویلر- برنولی همگن با طول l، سطح مقطع A، چگالی ρ، مدول الاستیسیته E، به یک هاب بدون وزن با سرعت دورانی Ω به مانند شکل (۱) متصل شده است. تغییر شکل‌ها در صفحات XZ و XY صورت می‌پذیرد.



شکل ۱- مدل سازه متصل به پایه چرخان

میدان سرعت یک نقطه انتخابی بر روی سازه عبارت است از:

$$\mathbf{V}=\dot{u}_y\hat{\mathbf{e}}_y+\dot{u}_z\hat{\mathbf{e}}_z \qquad (۱)$$

که در آن $u_y=\upsilon$ و $u_z=w$ به ترتیب تغییر شکل تیر در راستاهای y و z می‌باشد. انرژی‌های سیستم شامل انرژی جنبشی [۳۴]:

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\iiint_{\mathrm{V}}\rho|\mathbf{V}|^2\mathrm{d}\overline{\mathbf{V}}=\frac{1}{2}\rho A\int_0^l\left(\dot{\upsilon}^2+\dot{w}^2\right)dx \qquad (۲)$$

و انرژی پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{U}=\frac{1}{2}\iiint_{\mathrm{V}}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}\overline{\mathbf{V}}=\int_0^l\left(-M_{zz}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}-M_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{N}{2}\left\{\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}\right)dx \qquad (۳)$$

که در آن:

$$M_{yy}=\iint_A\sigma_{11}z\,dA,\ M_{zz}=\iint_A\sigma_{11}y\,dA,\ N=\iint_A\sigma_{11}dA$$
$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\quad,\quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)+u_{i,k}u_{k,j} \qquad (۴)$$

در این رابطه σ و ε به ترتیب تنش و کرنش تیر می‌باشند. کار انجام شده توسط نیروهای دورانی و اغتشاشات خارجی در نظر گرفته شده بصورت زیر است:

$$W=W_{ext}+W_{RO} \qquad (۵)$$

که در آن:

$$W_{RO}=\int_0^l f_R\left\{\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}dx$$
$$W_{ext}=\int_0^l\left(f_y\upsilon+f_z w\right)dx \qquad (۶)$$

همچنین f_y و f_z به ترتیب نیروهای خارجی در راستای y و z هستند. با دوران تیر، بار محوری f_R روی سیستم اعمال می‌شود به‌طوری‌که:

$$f_R=-\frac{1}{2}\rho A\Omega^2l^2\left(1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \qquad (۷)$$

با جایگذاری معادلات (۲)، (۴) و (۵) در اصل همیلتون:

$$\int_{t_0}^{t}\left(\delta T-\delta U+\delta W\right)dt=0 \qquad (۸)$$

معادلات مشتقات جزیی دینامیک غیرخطی حرکت ناشی از دوران سازه بصورت زیر استخراج می‌شود:

$$\rho A\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}+EI_{zz}\frac{\partial^4\upsilon}{\partial x^4}+\frac{EA}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right]-\frac{1}{2}\rho A\Omega^2l^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right]=f_y(x,t)$$
$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI_{yy}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{EA}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial w}{\partial x}\right]-\frac{1}{2}\rho A\Omega^2l^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right]=f_z(x,t) \qquad (۹)$$

27. High Deformation Homotopy Perturbation Theory (HDHPT)

که در آن I ممان دوم سطح است. سازه ترک‌دار باعث کاهش سفتی[۲۸] سازه به سبب کاهش صلبیت آن می‌شود. چرا که سفتی خمشی ترک، به مراتب از سفتی خمش تیر کمتر است. برای مدلسازی تیر ترک‌دار توسط فنر بدون جرم، سازه با استفاده از شرایط سازگاری به دو قسمت (زیرنویس ۱ برای سمت چپ ترک و ۲ برای سمت راست ترک) تقسیم می‌شود. فرض بر این است که برابری نیروی برشی، ممان خمش و جابجایی عمودی در جهت z (جهتی که اثر ترک در آن امتداد در نظر گرفته شده است) به صورت معادله (۱۰) است:

$$\begin{aligned}&w_1(a)=w_2(a)\\&\frac{\partial^2 w_1(a)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w_2(a)}{\partial x^2}\\&\frac{\partial^3 w_1(a)}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 w_2(a)}{\partial x^3}\end{aligned}\qquad (۱۰)$$

شرط تعادل از ممان خمش و شیب دو طرف ترک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^2 w_2(a)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_1(a)}{\partial x^2}=\frac{EI_{yy}}{k}\frac{\partial w_1(a)}{\partial x}\qquad (۱۱)$$

که در آن a فاصله از ریشه تیر تا ترک و k سفتی ترک می‌باشد. همچنین چهار شرط مرزی برای تکمیل معادلات حرکت عبارتند از:

$$@x=0\begin{cases}w_1(0)=0\\ \dfrac{\partial w_1(0)}{\partial x}=0\\ \upsilon(0)=0\\ \dfrac{\partial \upsilon(0)}{\partial x}=0\end{cases}\qquad @x=l\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w_2(l)}{\partial x^2}=0\\ \dfrac{\partial^3 w_2(l)}{\partial x^3}=0\\ \dfrac{\partial^2 \upsilon(l)}{\partial x^2}=0\\ \dfrac{\partial^3 \upsilon(l)}{\partial x^3}=0\end{cases}\qquad (۱۲)$$

با تعریف متغیرهای زیر:

$$\begin{aligned}&\varsigma=\frac{x}{l},\ c=\frac{a}{l},\ \overline{w}=\frac{w}{l},\ \overline{\upsilon}=\frac{\upsilon}{l},\ \tau=\frac{t}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\\&\Lambda=\frac{A}{l^2},\ \mu_{yy}=\frac{I_{yy}}{l^4},\ \mu_{zz}=\frac{I_{zz}}{l^4},\ \overline{\omega}=\omega l\sqrt{\frac{\rho}{E}}\\&\overline{\Omega}=\Omega l\sqrt{\frac{\rho}{E}},\ \kappa=\frac{k}{El^3},\ \overline{f}(\varsigma,\tau)=\frac{f(x,t)}{El},\ \overline{A}_0=\frac{A_0}{l}\end{aligned}\qquad (۱۳)$$

معادله (۹) به صورت معادله (۱۴) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\overline{\upsilon}}{\partial\tau^2}+\frac{\mu_{zz}}{\Lambda}\frac{\partial^4\overline{\upsilon}}{\partial\varsigma^4}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left[\left\{\left(\frac{\partial\overline{\upsilon}}{\partial\varsigma}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial\varsigma}\right)^2\right\}\frac{\partial\overline{\upsilon}}{\partial\varsigma}\right]\\&-\frac{1}{2}\overline{\Omega}^2\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left[\left(1-\varsigma^2\right)\frac{\partial\overline{\upsilon}}{\partial\varsigma}\right]=\overline{f}_y(\varsigma,\tau)\\&\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\tau^2}+\frac{\mu_{yy}}{\Lambda}\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\varsigma^4}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left[\left\{\left(\frac{\partial\overline{\upsilon}}{\partial\varsigma}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial\varsigma}\right)^2\right\}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\varsigma}\right]\\&-\frac{1}{2}\overline{\Omega}^2\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left[\left(1-\varsigma^2\right)\frac{\partial\overline{w}}{\partial\varsigma}\right]=\overline{f}_z(\varsigma,\tau)\end{aligned}\qquad (۱۴)$$

به منظور گسسته‌سازی معادله حرکت روش مودهای فرضی پیاده‌سازی شده است. به طور کلی پاسخ مساله به فرم زیر می‌باشد:

$$\left[\overline{w}(\varsigma,\tau)\ \ \overline{\upsilon}(\varsigma,\tau)\right]^T=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\overline{W}_i(\varsigma)\ \ \overline{V}_i(\varsigma)\right]^T T(\tau)\qquad (۱۵)$$

که در آن $\overline{V}_i(\varsigma)$ و $\overline{W}_i(\varsigma)$ شکل مودهای متعامد می‌باشند. در این مسئله تنها مود اول (به عنوان مود غالب) در نظر گرفته شده است. در این صورت داریم:

$$\left[\overline{w}(\varsigma,\tau)\ \ \overline{\upsilon}(\varsigma,\tau)\right]^T=\left[\overline{W}(\varsigma)\ \ \overline{V}(\varsigma)\right]^T T(\tau)\qquad (۱۶)$$

که در آن:

$$\overline{W}(\varsigma)=\begin{cases}\overline{W}_1(\varsigma) & 0<\varsigma<c\\ \overline{W}_2(\varsigma) & c<\varsigma<1\end{cases}\qquad (۱۷)$$

$$\begin{aligned}&\overline{W}_i(\varsigma)=A_i\sinh(\lambda\varsigma)+B_i\cosh(\lambda\varsigma)+\\&\qquad C_i\sin(\lambda\varsigma)+D_i\sin(\lambda\varsigma)\qquad i=1,2\\&\overline{V}(\varsigma)=A'\sinh(\lambda'\varsigma)+B'\cosh(\lambda'\varsigma)+\\&\qquad C'\sin(\lambda'\varsigma)+D'\sin(\lambda'\varsigma)\end{aligned}\qquad (۱۸)$$

با به‌کارگیری معادلات (۱۰) تا (۱۲) در معادله (۱۸) منجر به استخراج ضرایب A-D و مقادیر ویژه می‌شود. با پیاده‌سازی روش گالرکین، دستگاه معادلات با مشتقات جزئی (۱۴) تبدیل می‌شود به:

$$m\ddot{T}+\kappa T+gT^3=\overline{f}(\tau)\ \ for\ T(0)=A_0,\ \dot{T}(\tau)=0\qquad (۱۹)$$

که در آن:

28. Stiffness

$$
\begin{aligned}
m &= \left\{ \int_0^1 \bar{W}^2(\varsigma)d\varsigma + \lambda'^4 \int_0^1 \bar{V}^2(\varsigma)d\varsigma \right\} \\
&= \left\{ \left(\int_0^c \bar{W}_1^2(\varsigma)d\varsigma + \int_c^1 \bar{W}_2^2(\varsigma)d\varsigma \right) + \lambda'^4 \int_0^1 \bar{V}^2(\varsigma)d\varsigma \right\} \\
\kappa &= \frac{1}{\Lambda}\left\{ \mu_{yy}\lambda^4 \int_0^1 \bar{W}^2(\varsigma)d\varsigma + \mu_{zz}\lambda'^4 \int_0^1 \bar{V}^2(\varsigma)d\varsigma \right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\bar{\Omega}^2 \left\{ \int_0^1 \frac{d}{d\varsigma}\Big(\bar{W}(\varsigma)\big(1-\varsigma^2\big)\bar{W}'(\varsigma)\Big)d\varsigma + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \frac{d}{d\varsigma}\Big(\bar{V}(\varsigma)\big(1-\varsigma^2\big)\bar{V}'(\varsigma)\Big)d\varsigma \right\} \\
&= \frac{1}{\Lambda}\left\{ \mu_{yy}\lambda^4 \left(\int_0^c \bar{W}_1^2(\varsigma)d\varsigma + \int_c^1 \bar{W}_2^2(\varsigma)d\varsigma \right) \right. \\
&\quad \left. + \mu_{zz}\lambda'^4 \int_0^1 \bar{V}^2(\varsigma)d\varsigma \right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\bar{\Omega}^2 \left\{ \int_0^c \frac{d}{d\varsigma}\Big(\bar{W}_1(\varsigma)\big(1-\varsigma^2\big)\bar{W}_1'(\varsigma)\Big)d\varsigma \right. \\
&\quad - \int_c^1 \frac{d}{d\varsigma}\Big(\bar{W}_2(\varsigma)\big(1-\varsigma^2\big)\bar{W}_2'(\varsigma)\Big)d\varsigma \\
&\quad \left. + \int_0^l \frac{d}{d\varsigma}\Big(\bar{V}(\varsigma)\big(1-\varsigma^2\big)\bar{V}'(\varsigma)\Big)d\varsigma \right\} \\
g &= \frac{1}{2}\left\{ \int_0^1 \bar{W}(\varsigma)\frac{d}{d\varsigma}\Big[\big(\bar{W}'^2(\varsigma)+\bar{V}'^2(\varsigma)\big)\bar{W}'(\varsigma)\Big]d\varsigma \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \bar{V}(\varsigma)\frac{d}{d\varsigma}\Big[\big(\bar{W}'^2(\varsigma)+\bar{V}'^2(\varsigma)\big)\bar{V}'(\varsigma)\Big]d\varsigma \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \int_0^c \bar{W}_1(\varsigma)\frac{d}{d\varsigma}\Big[\big(\bar{W}_1'^2(\varsigma)+\bar{V}'^2(\varsigma)\big)\bar{W}_1'(\varsigma)\Big]d\varsigma \right. \\
&\quad + \int_c^1 \bar{W}_2(\varsigma)\frac{d}{d\varsigma}\Big[\big(\bar{W}_2'^2(\varsigma)+\bar{V}'^2(\varsigma)\big)\bar{W}_2'(\varsigma)\Big]d\varsigma \\
&\quad \left. + \int_0^1 \bar{V}(\varsigma)\frac{d}{d\varsigma}\Big[\big(\bar{W}'^2(\varsigma)+\bar{V}'^2(\varsigma)\big)\bar{V}'(\varsigma)\Big]d\varsigma \right\} \\
\bar{f}(\tau) &= \int_0^1 \bar{W}(\varsigma)\bar{f}_z(\varsigma,\tau)d\varsigma + \int_0^1 \bar{V}(\varsigma)\bar{f}_y(\varsigma,\tau)d\varsigma \\
&= \int_0^c \bar{W}_1(\varsigma)\bar{f}_z(\varsigma,\tau)d\varsigma + \int_c^1 \bar{W}_2(\varsigma)\bar{f}_z(\varsigma,\tau)d\varsigma \\
&\quad + \int_0^1 \bar{V}(\varsigma)\bar{f}_y(\varsigma,\tau)d\varsigma \\
A_0 &= \int_0^c \bar{w}(\varsigma,0)\bar{W}_1(\varsigma)d\varsigma + \int_c^1 \bar{w}(\varsigma,0)\bar{W}_2(\varsigma)d\varsigma
\end{aligned} \tag{۲۰}
$$

با تعریف $\eta=\kappa/m$ ، $\zeta=g/m$ ، $F=\bar{f}(\tau)/m$ و در نظر گرفتن $T(\tau)=u(\bar{\tau})=u(\bar{\omega}\tau)$ معادله (۱۹) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\bar{\omega}^2\ddot{u}+\eta u+\zeta u^3=F \tag{۲۱}$$

$$u(0)=\bar{A}_0 \ , \ \dot{u}(0)=0 \tag{۲۲}$$

که در آن $\bar{\omega}$ فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم و شرایط اولیه برای استخراج پاسخ معادله (۲۱) مطابق با معادله (۲۲) توصیف می‌گردد.

در گام بعد برای تحلیل مودال، ارتعاشات آزاد و اجباری معادله (۲۱)، از روش هوموتوپی پرتوربیشن (با رویکرد تغییر شکل مرتبه بالا) استفاده می‌شود. مهمترین مزیت این روش نسبت به مدل رایج آن وجود یک الگوی بازگشتی (محاسبه ترم iام از ترم i-1ام) است. علاوه‌براین در روش HDHPM نیازی به تعریف پارامترهای کوچک در معادله دیفرانسیل نمی‌باشد. با تشکیل معادله هموتوپی برای معادله (۲۱) داریم [۳۵]:

$$\ell\big[u_m(\bar{\tau})-X_m u_{m-1}(\bar{\tau})\big]=\bar{h}H(\bar{\tau})R_m(\mathbf{u}_{m-1}) \tag{۲۳}$$

که در آن:

$$
\begin{aligned}
R_m(\mathbf{u}_{m-1}) &= \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}N({}^*\mathrm{u}[\bar{\tau};q])}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} \\
{}^*u[\bar{\tau};q] &= u_0(\bar{\tau})+\sum_{m=1}^{\infty}u_m(\bar{\tau})q^m \\
X_m &= \begin{cases} 0 & m\le 1 \\ 1 & m>1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{۲۴}
$$

همچنین $u_0(\bar{\tau})=\bar{A}_0\cos(\bar{\tau})$ تقریب اولیه پاسخ معادله (۲۱) بوده که شرایط اولیه را ارضاء می‌کند، $q\in[0,1]$ پارامتر اغتشاشات است که در آن بازاء $q=0$ مقدار u^* به تقریب اولیه و بازاء $q=1$ مقدار u^* به پاسخ دقیق $u(\bar{\tau})$ میل می‌کند، $H(\bar{\tau})$ تابع کمکی بوده که مقدار آن برای این مسئله $H(\bar{\tau})=1$ و $-1.5\le\bar{h}\le-0.5$ در نظر گرفته شده است. پارامترهای ℓ و N (به عنوان اپراتورهای خطی و غیرخطی کمکی در معادلات (۲۱) و (۲۲)) به صورت زیر تعریف شده است:

$$\ell[{}^*u]=\frac{\partial^2\, {}^*u}{\partial\bar{\tau}^2}+{}^*u \tag{۲۵}$$

$$N({}^*u[\bar{\tau};q])={}^*\bar{\omega}^2\,{}^*\ddot{u}+\eta\,{}^*u+\zeta\,{}^*u^3 \tag{۲۶}$$

که در آن:

$${}^*u=u_0+\sum_{m=1}^{\infty}u_m q^m \tag{۲۷}$$

و همچنین:

$${}^*\bar{\omega}=\bar{\omega}_0+\sum_{m=1}^{\infty}\bar{\omega}_m q^m \tag{۲۸}$$

برای $m=1$ در معادله (۲۳):

$$\ell\big[u_1(\bar{\tau})\big]=\bar{h}H(\bar{\tau})R_1(\mathbf{u}_0) \tag{۲۹}$$

که در آن:

$$R_1(\mathbf{u}_0)=\left.\frac{\partial^0 N\,({}^{*}u[\overline{\tau};q])}{\partial q^0}\right|_{q=0}=\overline{\omega}_0^2\ddot{u}_0+\eta u_0+\zeta u_0^3 \qquad (۳۰)$$

با جایگذاری معادله (۲۷) در معادله (۲۶):

$$\ddot{u}_1+u_1=\overline{\omega}_0^2\ddot{u}_0+\eta u_0+\zeta u_0^3 \qquad (۳۱)$$

و ساده‌سازی آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1+u_1=&\\ &-\overline{\omega}_0^2\overline{A}_0\cos(\overline{\tau})+\eta\overline{A}_0\cos(\overline{\tau})+\zeta\left(\overline{A}_0\cos(\overline{\tau})\right)^3\\ &=-\overline{\omega}_0^2\overline{A}_0\cos(\overline{\tau})+\eta\overline{A}_0\cos(\overline{\tau})\\ &\quad+\zeta\overline{A}_0^{\,3}\left[\frac{3}{4}\cos(\overline{\tau})+\frac{1}{4}\cos(3\overline{\tau})\right]\\ &=\left[-\overline{\omega}_0^2+\eta\overline{A}_0+\frac{3}{4}\zeta\overline{A}_0^{\,3}\right]\cos(\overline{\tau})+\frac{\zeta\overline{A}_0^{\,3}}{4}\cos(3\overline{\tau})\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

برای جلوگیری از سکولار شدن معادله (۳۲) داریم:

$$-\overline{\omega}_0^2+\eta\overline{A}_0+\frac{3}{4}\zeta\overline{A}_0^{\,3}=0 \quad\rightarrow\quad \overline{\omega}_0=\sqrt{\eta+\frac{3}{4}\zeta\overline{A}_0^{\,2}} \qquad (۳۳)$$

و همچنین:

$$\begin{aligned}&\ddot{u}_1+u_1=\frac{\zeta\overline{A}_0^{\,3}}{4}\cos(3\overline{\tau})\ ,\\ &u_1(0)=0,\quad \dot{u}_1(0)=0\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

که پاسخ آن عبارت است از:

$$u_1=\frac{\zeta\overline{A}_0^{\,3}}{32}\cos(\overline{\tau})-\frac{\zeta\overline{A}_0^{\,3}}{32}\cos(3\overline{\tau}) \qquad (۳۵)$$

به همین ترتیب برای $m=2$ داریم:

$$\begin{aligned}&\ddot{u}_2+u_2=\overline{\omega}_0^2\ddot{u}_1+2\overline{\omega}_0\overline{\omega}_1\ddot{u}_0+\eta u_1+3\zeta u_1u_0^2\\ &u_2(0)=0,\quad \dot{u}_2(0)=0\end{aligned} \qquad (۳۶)$$

مقدار u_2 را نیز می‌توان به مانند u_1 محاسبه کرد. همچنین با عدم سکولار شدن معادله (۳۶)، مقدار $\overline{\omega}_1$ (دومین جمله معادله (۲۸)) محاسبه می‌شود. بنابراین معادله (۳۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\ddot{u}_2+u_2=-\frac{3\zeta^2\overline{A}_0^{\,4}}{64}\cos(5\overline{\tau}) \qquad (۳۷)$$

که پاسخ آن به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$u_2=\frac{1}{24}\frac{3\zeta^2\overline{A}_0^{\,4}}{64}\cos(\overline{\tau})-\frac{1}{24}\frac{3\zeta^2\overline{A}_0^{\,4}}{64}\cos(5\overline{\tau}) \qquad (۳۸)$$

فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\overline{\omega}^2=\left(\eta+\frac{3}{4}\zeta\overline{A}_0^{\,2}\right)^2+\sqrt{\eta^2+\frac{3}{2}\zeta\eta\overline{A}_0^{\,2}+\frac{21}{32}\eta^2\overline{A}_0^{\,4}} \qquad (۳۹)$$

بنابراین پاسخ سیستم عبارت است از:

$$u(\overline{\tau})=\overline{A}_0\cos(\overline{\tau})+\frac{\zeta\overline{A}_0^{\,3}}{32}\cos(\overline{\tau})-\frac{\zeta\overline{A}_0^{\,3}}{32}\cos(\overline{\tau}) \qquad (۴۰)$$

اکنون ارتعاشات اجباری با تحریک هارمونیک سیستم بررسی می‌شود. با در نظر گرفتن $F=F_0\cos(\overline{\omega}_F\overline{\tau})$ به عنوان تحریک خارجی برای سیستم با لحاظ $\overline{\omega}_F=\omega_F l\sqrt{\rho/E}$، پاسخ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u(\overline{\tau})=A\cos(\overline{\omega}_F\overline{\tau}) \qquad (۴۱)$$

با جایگذاری معادله (۴۱) در معادله (۲۱) داریم:

$$-A\overline{\omega}_F^{\,2}+A\eta+\frac{3}{4}\zeta A^3=F_0 \qquad (۴۲)$$

با حل معادله (۴۲) برای استخراج A (بر حسب برحسب $\overline{\omega}_F$)، نمودار دوشاخگی استخراج می‌شود.

شبیه‌سازی و تحلیل نتایج

در این بخش نتایج حاصل از شبیه‌سازی تیر ترک‌دار چرخان به واسطه یک مطالعه مقایسه‌ای برای پارامترهای مختلف موثر بر عملکرد سیستم بررسی و ارائه شده است. پارامترهای در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی‌ها عبارتند از: $l=7(m)$، $A=0.24(m^2)$، $\rho=7800\,(kg/m^3)$، $E=210\,(GPa)$ و $0<c<1$.

پارامترهای مورد مطالعه موثر بر عملکرد سیستم سازه با پایه چرخان در قالب، مقادیر اولیه $A_{0i}\,(0.01, 0.02, 0.03, 0.04)(m)$، دامنه تحریک خارجی $F_{0i}\,(20, 25, 30, 35)(N)$، سرعت دوران $\Omega_i\,(0,10,20,25)(rad/\sec)$، فرکانس تحریک $\omega_F=25(Hz)$، سفتی ترک $k_i\,(10^4, 5\times10^4, 10^5, 5\times10^5)(N.m)$ و محل ترک $c_i\,(0.1, 0.3, 0.5, 0.8)$ در نظر گرفته شده است. اثرات متقابل این پارامترها بر فرکانس غیرخطی سیستم در جداول (۱-۵) نمایش داده و برای یک حالت خاص با الگوریتم عددی رانگ کوتا[29] مقایسه شده است.

جدول ۱- فرکانس‌های غیرخطی، مقایسه k و Ω_i

k \ Ω_i	۰	۱۰	۲۰	۲۵
۱۰[۴]	۰/۰۵۴	۲/۸۹۸	۵/۷۹۵	۸/۶۹۲
۵×۱۰[۴]	۰/۰۶۰	۲/۹۲۱	۵/۹۸۳	۸/۸۹۵
۱۰[۵]	۰/۰۶۱	۲/۹۷۳	۶/۱۸۳	۹/۰۱۶
۵×۱۰[۵]	۰/۰۶۱	۳/۵۰۱	۶/۹۸۰	۹/۸۱۴
RK4	۰/۰۶۱۰۴	۳/۵۰۴۱	۶/۹۸۷۴	۹/۸۲۷۳

29. Rung-Kutta

جدول ۲- فرکانس‌های غیرخطی، مقایسه c و Ω_i

c \ Ω_i	۰	۱۰	۲۰	۲۵
۰/۱	۰/۰۵۴	۲/۳۵۸	۴/۷۱۵	۷/۰۷۲
۰/۳	۰/۰۵۸	۲/۵۳۸	۴/۹۹۸	۷/۴۵۳
۰/۵	۰/۰۶۰	۲/۶۷۶	۵/۱۵۰	۷/۵۹۵
۰/۸	۰/۰۶۱	۲/۶۸۷	۵/۱۶۷	۷/۶۰۴
RK4	۰/۰۶۱۰۳	۲/۶۸۸۹	۵/۱۷۱۹	۷/۶۱۳۲

جدول ۳- فرکانس‌های غیرخطی، مقایسه c و A_0

c \ A_0	۰.۰۱	۰.۰۲	۰.۰۳	۰.۰۴
۰/۱	۰/۰۵۳۶	۰/۰۷۹۶	۰/۱۰۴۸	۰/۱۳۴۵
۰/۳	۰/۰۶	۰/۰۸۵۳	۰/۱۱۲۲	۰/۱۴۳۹
۰/۵	۰/۰۶۱	۰/۰۹۷۵	۰/۱۲۴۶	۰/۱۵۶۶
۰/۸	۰/۰۶۱۱	۰/۰۹۸	۰/۱۲۵۱	۰/۱۵۶۹
RK4	۰/۰۶۱۱۳	۰/۰۹۸۰۹	۰/۱۲۵۶	۰/۱۵۸۱

جدول ۴- فرکانس‌های غیرخطی، مقایسه k و A_0

A_0 \ k	۱۰^{۴}	۵×۱۰^{۴}	۱۰^{۵}	۵×۱۰^{۵}
۰/۰۱	۰/۰۵۲۶	۰/۰۸۱۳	۰/۱۱۳۴	۰/۱۴۷
۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۰۸۴۶	۰/۱۱۴۶	۰/۱۴۶۶
۰/۰۳	۰/۰۶۱۰	۰/۰۸۵۳	۰/۱۱۵۱	۰/۱۴۷۱
۰/۰۴	۰/۰۶۱۱	۰/۰۸۵۴	۰/۱۱۵۲	۰/۱۴۷۱
RK4	۰/۰۶۱۵۲	۰/۰۸۵۷۳	۰/۱۱۵۳۱	۰/۱۴۷۱۷

جدول ۵- فرکانس‌های غیرخطی، مقایسه k و c

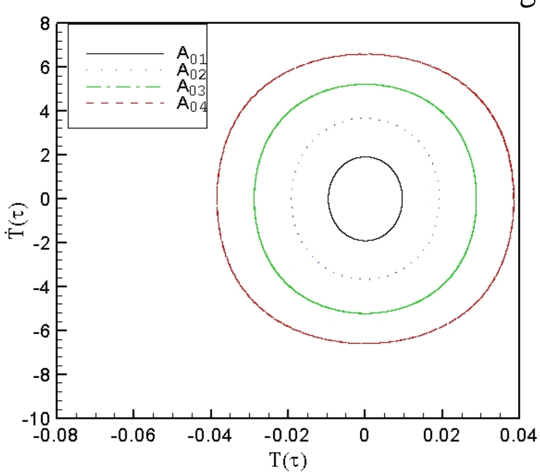
c \ k	۱۰^{۴}	۵×۱۰^{۴}	۱۰^{۵}	۵×۱۰^{۵}
۰/۱	۰/۰۳۴۸۵	۰/۰۵۳۸۹	۰/۰۶۰۲۷	۰/۰۶۱۰۸
۰/۳	۰/۰۴۳۹۸	۰/۰۵۷۸۶	۰/۰۶۰۸	۰/۰۶۱۱۳
۰/۵	۰/۰۵۳۶۶	۰/۰۶۰۰۸	۰/۰۶۱۰۶	۰/۰۶۱۱۶
۰/۸	۰/۰۵۳۹۱	۰/۰۶۰۹۶	۰/۰۶۱۱۵	۰/۰۶۱۱۷
RK4	۰/۰۵۴۳۲	۰/۰۶۱۱۰	۰.۰۶۱۱۹۸	۰.۰۶۱۲۰

همان‌طورکه انتظار می‌رود با افزایش ترم سفتی فنر پیچشی (سفتی ترک)، فرکانس طبیعی غیرخطی سازه ترک‌دار به فرکانس طبیعی تیر سالم نزدیک‌تر می‌شود. علاوه‌براین، می توان دریافت که برای ترک‌های نزدیک به ریشه فرکانس غیرخطی پایین‌تر است، درحالی‌که با حرکت ترک به سمت انتهای آزاد، مقدار فرکانس افزایش می‌یابد. شایان ذکر است که با نزدیک‌تر شدن ترک به انتهای آزاد، تغییرات فرکانس نیز کمتر می‌شود. این به معنی میزان اثر جزئی ترک در انتهای آزاد برای سازه‌های با پایه چرخان است. همچنین تغییرات میان روش هوموتوپی پرتوربیشن با تخمین دوجمله‌ای و الگوریتم عددی رانگ کوتا با افزایش سرعت دوران افزایش می‌یابد.

همچنین می‌توان دریافت که برای ویژگی‌های ثابت ترک (مکان c و سختی k) با افزایش سرعت دوران فرکانس غیرخطی به شدت افزایش می‌یابد که این به واسطه اثرات سفتی گریز از مرکز است. همچنین برای تیر بدون دوران پایه، هرچه محل ترک از ریشه دورتر می‌شود، فرکانس طبیعی نیز بالاتر می‌رود. با این حال، در این حالت با تغییر مکان ترک به سمت انتهای آزاد (مکان‌های $c=0.5$ و $c=0.8$) فرکانس تغییر چندانی نمی‌کند. این مسئله برای سازه با پایه چرخان متفاوت است. به عبارت دیگر، مقادیر بالاتر Ω_i اثرات ترک را به صورت قابل توجهی کاهش می‌دهد. به‌طور مشابه برای یک سفتی ترک ثابت اثرات مقدار اولیه بر تغییرات فرکانس قابل ملاحظه نیست و این درحالیست که اثرات محل ترک را نمی‌توان بر فرکانس نادیده گرفت.

علاوه‌براین، شبیه‌سازی برای میزان اثر مکان و سفتی‌های مختلف ترک و تعامل این دو پارامتر بر فرکانس طبیعی سازه صورت پذیرفته است. برای مقادیر کوچکتر c یا k ترک اثرات جدی بر فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم دارد. به‌طوریکه با نزدیک شدن ترک به انتهای آزاد سازه فرکانس افزایش و با افزایش k ($k\to\infty$) اثر ترک تقریبا ناپدید می‌شود. آنچه از مقایسه نتایج میان روش تحلیلی و روش عددی قابل مشاهده می‌باشد آن است که با نزدیک‌تر شدن رفتار دینامیک سیستم به رفتار غیرخطی (به طور مثال، کاهش سفتی ترک، نزدیک شدن ترک به پایه، افزایش سرعت دورانی و افزایش مقدار اولیه) فاصله مقادیر شبیه‌سازی‌های این دو روش بیشتر می‌شود. همچنین می‌توان دریافت که روش هوموتوپی پرتوربیشن با تخمین صرفا دوجمله نتایجی با اختلاف جزئی با نتایج روش عددی نمایش می‌دهد.

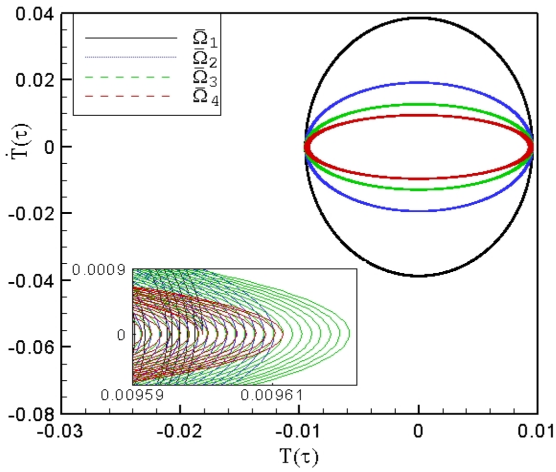
در ادامه عملکرد سیستم توسط شکل‌های (۲) تا (۵) و در قالب تحلیل‌های فازی برای ارتعاشات آزاد نمایش داده شده است. در شکل (۲) نمودار فازی سیستم برای مقادیر اولیه متفاوت (A_i) نشان داده شده است.



شکل ۲- نمودار فازی برای مقادیر اولیه مختلف

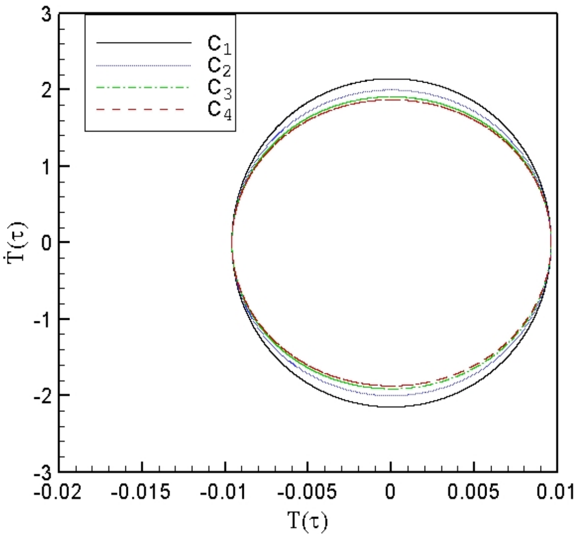
همانطور که می‌توان مشاهده کرد که سیستم به ازاء تمام مقادیر اولیه در نظر گرفته شده رفتار پایدار از خود نشان می‌دهد که افزایش دامنه نوسانات می‌تواند شرایط تعادل را کاهش دهد. همچنین اثر مقدار اولیه منجر به تولید منحنی‌های بسته متحدالمرکزی می‌شود که با افزایش این مقدار، منحنی در دو راستای افقی و عمودی بدون نقطه مشترک افزایش می‌یابد که خود متناظر افزایش دامنه نوسانات سیستم است. به طور کلی رفتار پایدار سیستم در نمودارهای فازی تشکیل یک منحنی بسته دایروی یا بیضوی را می‌دهد. اندازه هر نمودار ارتباط مستقیمی با تعادل انرژی سیستم دارد. با افزایش صلبیت سیستم اندازه هر منحنی بسته کاهش می‌یابد.

با افزایش اندازه منحنی بسته، سطح انرژی سیستم نیز افزایش می‌یابد. با افزایش سرعت زاویه‌ای منحنی‌های موجود متحدالمرکز بوده و در امتداد محور افقی کشیده می‌شوند (شکل ۳). در این حالت با تغییر سرعت‌های دورانی، سیستم به حفظ پایداری خود ادامه داده، اما پاسخ آن به تغییرات شرایط اولیه سریعتر می‌شود. میزان تغییرات انرژی برای سیستم ثابت ($\bar{\Omega}_1$) تا اولین سرعت دورانی ($\bar{\Omega}_2$)به بیش از ۵۰ درصد رسیده است. با افزایش سرعت دوران (سرعت‌های دورانی $\bar{\Omega}_3$ و $\bar{\Omega}_4$) نسبت نرخ تغییرات دامنه نوسان کاهش می‌یابد که نشان دهنده کاهش انرژی سیستم است.

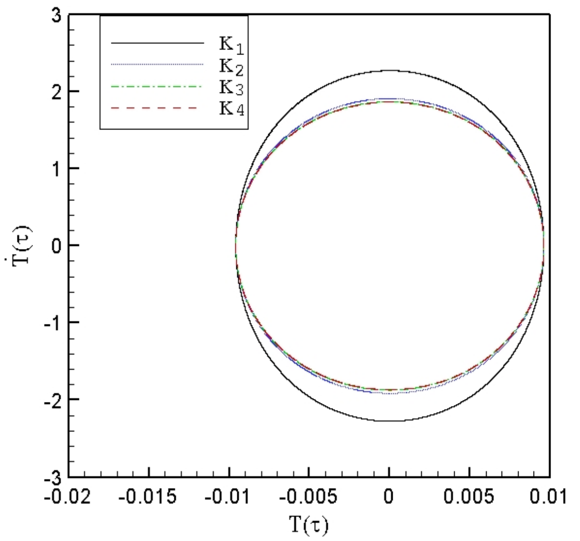


شکل ۳- نمودار فازی برای سرعت‌های دوراتی مختلف

اثرات مکان و سفتی ترک نیز در محدوده معینی در نمودار فازی قرار گرفته‌اند که رفتار آنها به ازاء تغییر در مقادیر در نظر گرفته شده محدود است (شکل ۴ و ۵). همچنین می‌توان از نمودارها دریافت که افزایش مقادیر سفتی و با دور شدن ترک از ریشه تیر، منحنی‌های بسته فرم بیضی به خود می‌گیرند که نشان دهنده کاهش انرژی سیستم است. میزان این تغییرات در مقادیر سفتی بالا کاهش می‌یابد (نزدیک‌تر شدن رفتار تیر ترک‌دار به تیر سالم).



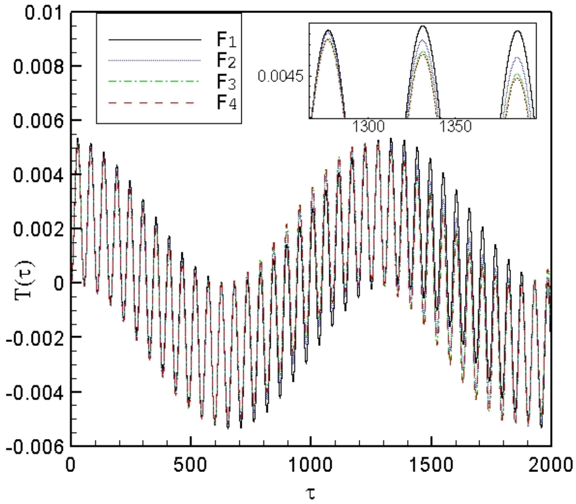
شکل ۴- نمودار فازی برای موقعیت‌های مختلف ترک



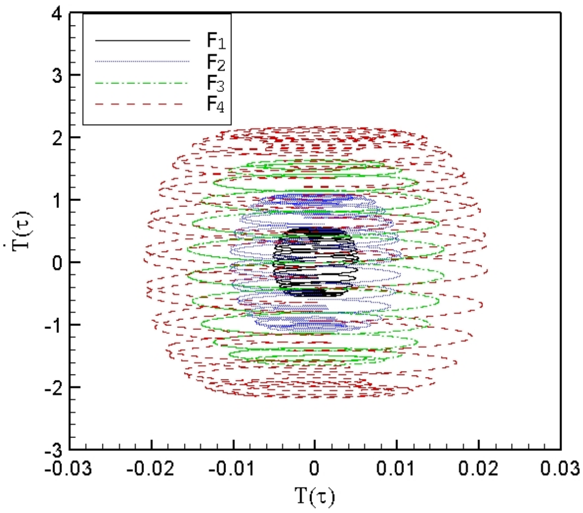
شکل ۵- نمودار فازی برای سفتی‌های مختلف ترک

آنچه می‌توان از این شبیه‌سازی‌ها جمع‌بندی کرد آن است که تغییرات سرعت زاویه‌ای، سفتی و محل ترک مورد بررسی اثرات کران‌داری بر تغییرات نمودار فازی دارند. همچنین می‌توان دریافت که تغییرات دامنه شرایط اولیه و سرعت زاویه‌ای شدیدترین اثر را در بین پارامترهای مورد مطالعه بر رفتار ارتعاشات آزاد سیستم دارد.

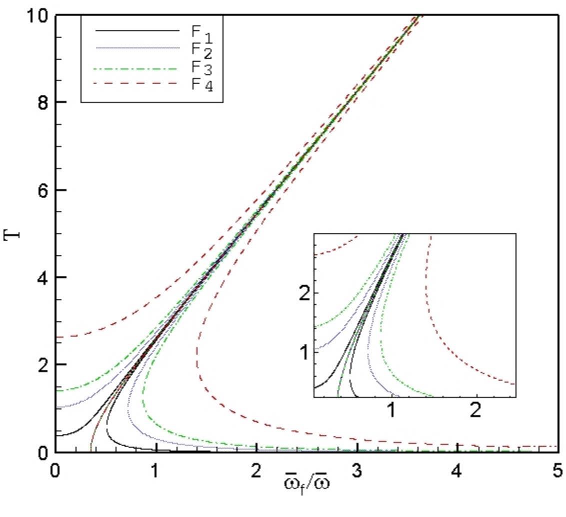
نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات اجباری در قالب تغییر شکل‌های انتهای سازه، نمودار فازی و نمودارهای دوشاخگی در شکل‌های (۶) تا (۹) مقایسه شده‌اند. به مانند بخش قبل، تأثیر پارامترهای مختلف بر عملکرد و پایداری سیستم بررسی شده است. همانطور که می‌توان مشاهده کرد بیشترین پارامتر تأثیرگذار بر عملکرد سیستم، اثرات سرعت زاویه‌ای و تحریک خارجی است که به وضوح از نمودارهای فازی و دوشاخگی قابل استنتاج است.



الف)

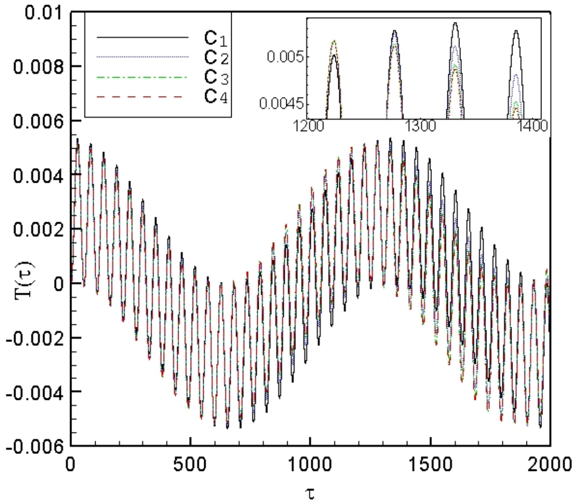


ب)

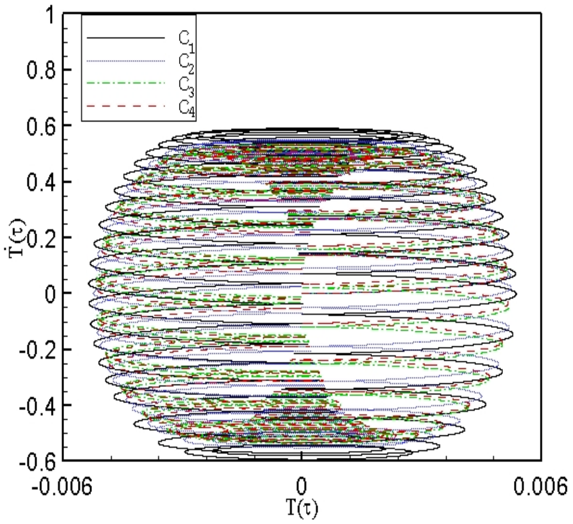


ج)

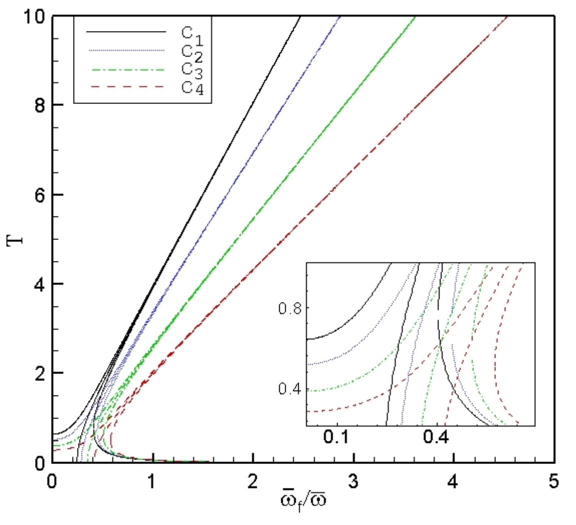
شکل ۶- الف تا ج، تغییر شکل نمودار فازی و دوشاخگی برای دامنه تحریک مختلف



الف)

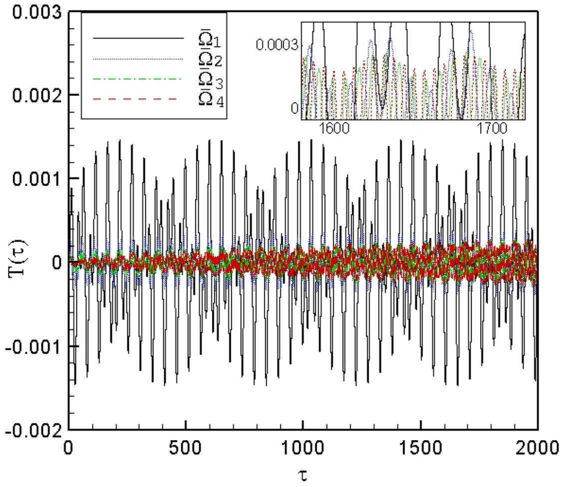


ب)

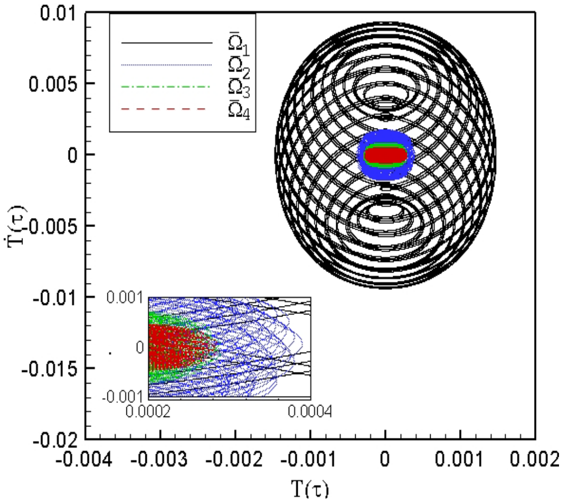


ج)

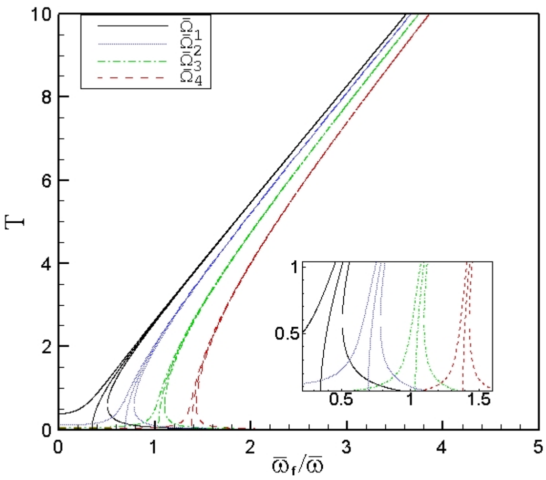
شکل ۷- الف تا ج، تغییر شکل، نمودار فاز و دوشاخگی برای موقعیت‌های مختلف ترک



الف)

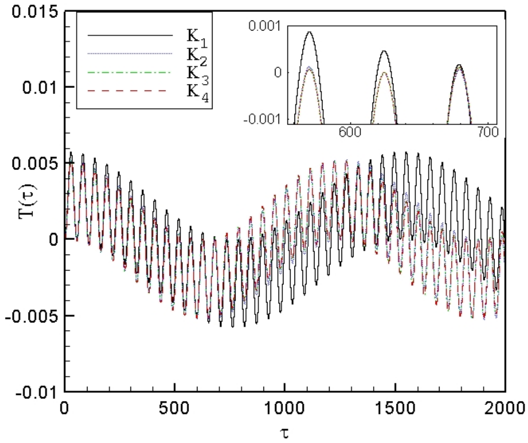


ب)

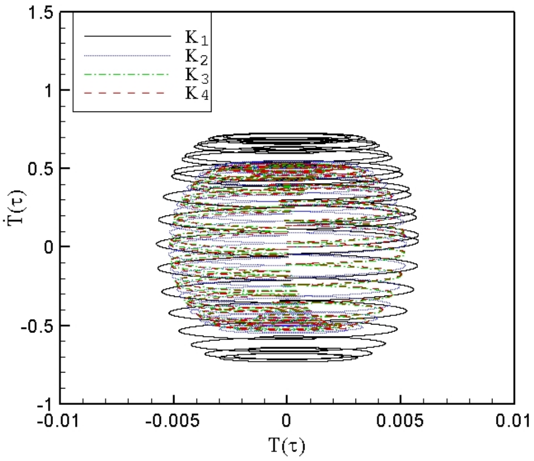


ج)

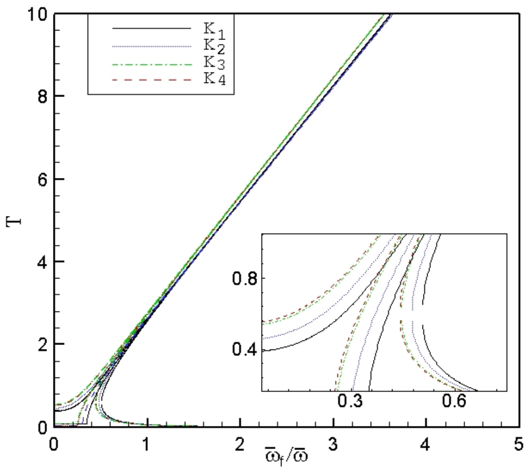
شکل ۸- الف تا ج، تغییر شکل، نمودار فازی و دوشاخگی برای سرعت‌های زاویه‌ای مختلف



الف)



ب)



ج)

شکل ۹- الف تا ج، تغییر شکل، نمودار فازی و دوشاخگی برای سفتی‌های مختلف ترک

برای تحلیل ارتعاشات آزاد، نمودارهای فازی منحنی‌های دوره‌ای پایداری را نمایش دادند که دامنه آنها وابسته به شرایط اولیه بود. از طرف دیگر یک پاسخ رایج برای سیستم‌های با ارتعاشات

اجباری، منحنی‌های دوره‌ای به نام چرخه محدود[۳۰] است که دوره آن متناسب با تحریک هارمونیک است. همچنین در این حالت پاسخ سیستم تنها به شرایط اولیه بستگی نداشته و متاثر از انرژی سیستم است.

در چنین سیستم‌هایی، دوشاخگی منجر به تغییر در رفتار رزونانسی می‌شود. نقطه اوج رزونانس به سمت راست خم شده و تشکیل دو شاخگی دوبخشی در هر دو طرف منطقه هیسترزیس را می‌دهد. همانطور که از نمودار دوشاخگی شکل (۶) مشاهده می‌شود، با افزایش دامنه تحریک، منطقه احاطه شده گسترده تر می‌شود. این بدان معناست که پاسخ دینامیکی می‌تواند در بازه‌های کوچکتری از تغییر در پارامترها رخ دهد و سیستم نسبت به این تغییرات حساس‌تر شود. با این حال، این امر بر رفتار کلی فرکانس‌های غیرخطی تأثیر نمی‌گذارد.

به واسطه حرکت ترک به سمت ریشه، نقطه پیک رزونانسی به سمت چپ حرکت کرده، شیب نمودارهای دوشاخگی کمتر شده و رفتار دینامیکی سیستم با دامنه بزرگتری نوسانی می‌کند (شکل ۷). ناحیه محصور در نمودار فازی این شکل نیز مبین افزایش انرژی سیستم با حرکت ترک به سمت ریشه است.

تغییر در سرعت زاویه‌ای یا سفتی ترک تأثیر اندکی بر شیب منحنی بَک‌بُن[۳۱] می‌گذارد (شکل ۸ و ۹) در حالی‌که تغییرات سرعت زاویه‌ای موجب تغییرات بزرگی در مقادیر فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم (افزایش نسبت فرکانسی)، دامنه ارتعاشات و حرکت نمودار دوشاخگی در امتداد محور افقی می‌شود. همچنین اثرات بارز تغییر در سفتی ترک در ارتعاشات اجباری را می‌توان در نمودار پاسخ زمانی (ارتعاشات) مشاهده کرد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به تحلیل پایداری و ارتعاشات آزاد و اجباری یک سازه انعطاف‌پذیر ترک‌دار متصل به پایه چرخان پرداخته شد. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حرکت با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم غیرخطی گسسته و پاسخ با استفاده از تکنیک هوموتوپی پرتوربیشن با تغییر شکل مرتبه بالا استخراج و با الگوریتم عددی رانگ کوتا مقایسه شد. تحلیل‌های نمودار فازی مبین رفتار پایدار سیستم در ارتعاشات آزاد است. بررسی‌های مفصلی در مورد اثرات پارامترهای مهم و موثر بر عملکرد سیستم مانند مقدار اولیه، سرعت دوران پایه، محل و سفتی ترک بر رفتار ارتعاشات غیرخطی سیستمی که در معرض تحریک خارجی قرار گرفته به واسطه تحلیل پاسخ‌های زمانی، نمودار فازی و دوشاخگی صورت پذیرفت. با توجه به نیروهای گریز از مرکز، پایداری سازه ترک‌دار به شدت تغییر می‌کند. به طوری‌که برای یک مکان ثابت و سفتی پیچشی ترک، اینرسی دورانی مساحت ناحیه محصور در نمودار فازی را به کمتر از یک سوم در سرعت‌های بالاتر نسبت به حالت بدون دوران کاهش می‌دهد. برای سرعت‌های زاویه‌ای بالا، مرزهای پایداری نسبت به مشخصه‌های ترک مقاوم می‌باشد. به طوریکه تغییرات در ناحیه محصور در سرعت‌های بالا کمتر از ۱۵ درصد است. این رفتار برای مقادیر مختلف سفتی و مکان ترک نیز صادق است (تغییرات کمتر از ۱۰ درصد در ناحیه محصور). سیستم پیشنهادی نسبت به تغییر در سایر مقادیر پارامترهای در نظر گرفته شده رفتار پایدار از خود نشان داد، این در حالیست که پایداری وابستگی زیادی به جنس و هندسه مسئله دارد. آنچه می‌توان دریافت مبین آن است که سادگی و کارآمدی روش دقیق هوموتوپی پرتوربیشن حتی با تخمین‌های اولیه (دو جمله اول) هنگامیکه نیاز به بررسی اثرات پارامترهای مختلف و مهم بر رفتار غیرخطی سیستم‌های با دینامیک پیچیده می‌باشد همچنین برای مسائل با دامنه‌های گسترده ارتعاشات در مقابل روش‌های عددی موجود (رانگ کوتا) و حتی روش‌های کلاسیک اغتشاشات قابل ملاحظه است.

مراجع

[1] J. Zeng, K. Chen, H. Ma, T. Duan, and B. Wen, "Vibration response analysis of a cracked rotating compressor blade during run-up process," *Mech. Sys. and Signal Proc.,* vol. 118, pp. 568-583, 2019.

[2] S. Salighe and H. Mohammadi, "Semi-active nonlinear vibration control of a functionally graded material rotating beam with uncertainties, using a frequency estimator," *Com. Str.,* vol. 210, pp. 367-380, 2019.

[3] S. El Arem, "Nonlinear analysis, instability and routes to chaos of a cracked rotating shaft," *Nonlinear Dynamics,* vol. 96, pp. 667-683, 2019.

[4] J. W. Lee and J. Y. Lee, "In-plane bending vibration analysis of a rotating beam with multiple edge cracks by using the transfer matrix method," *Meccanica,* vol. 52, pp. 1143-1157, 2017.

[5] B. Li, H. Ma, X. Yu, J. Zeng, X. Guo, and B. Wen, "Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of rotor-blade system with nonlinear supports," *Arch. of App. Mech.,* vol. 89, pp. 1375-1402, 2019.

[6] Y. Li, S. B. Mulani, R. K. Kapania, Q. Fei, and S. Wu, "Nonstationary random vibration analysis of wing with geometric nonlinearity under correlated excitation," *J. of Air.,* vol. 55, pp. 2078-2091, 2018.

[7] Y. Lu, Q. Shao, M. Amabili, H. Yue, and H. Guo, "Nonlinear vibration control effects of membrane structures with in-plane PVDF actuators: A parametric study," *Int. J. of Non. Mech.,* p. 103466, 2020.

[8] E. Esmailzadeh, D. Younesian, and H. Askari, "Analytical methods in nonlinear oscillations," *Netherlands: Springer,* 2018.

30. Limit Cycles
31. Backbone

[9] G. Sobamowo and A. Yinusa, "Power Series-Aftertreatment Technique for Nonlinear Cubic Duffing and Double-Well Duffing Oscillators," *J. of Com. App. Mech.,* vol. 48, pp. 297-306, 2017.
[10] M. Islam and E. Yankson, "Boundedness and stability in nonlinear delay difference equations employing fixed point theory," *Elec. J. of Qual. The. of Diff. Eq.,* vol. 26, 2005.
[11] A. Cardona, A. Lerusse, and M. Geradin, "Fast Fourier nonlinear vibration analysis," *Comp. Mech,* vol. 22, pp. 128-142, 1998.
[12] D. Adair and M. Jaeger, "Simulation of tapered rotating beams with centrifugal stiffening using the Adomian decomposition method," *Applied Math Mod,* vol. 40, pp. 3230-3241, 2016.
[13] N. Rubinstein and J. T. Stadter, "Bounds to bending frequencies of a rotating beam," *J. of the Franklin Ins.,* vol. 294, pp. 217-229, 1972.
[14] M. Gómez, C. Castejón, and J. García-Prada, "Crack detection in rotating shafts based on 3× energy: Analytical and experimental analyses," *Mech. and Mach. Th.,* vol. 96, pp. 94-106, 2016.
[15] A. Yashar, N. Ferguson, and M. Ghandchi-Tehrani, "Simplified modelling and analysis of a rotating Euler-Bernoulli beam with a single cracked edge," *J. of S. and Vib.,* vol. 420, pp. 346-356, 2018.
[16] B. Panigrahi and G. Pohit, "Effect of cracks on nonlinear flexural vibration of rotating Timoshenko functionally graded material beam having large amplitude motion," *Proc. of the Inst. of Mech. Eng., Part C,* vol. 232, pp. 930-940, 2018.
[17] V. Panchore and R. Ganguli, "Quadratic B-spline finite element method for a rotating nonuniform Euler–Bernoulli beam," *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics,* vol. 19, pp. 340-350, 2018.
[18] J. Latalski, J. Warminski, and G. Rega, "Bending–twisting vibrations of a rotating hub–thin-walled composite beam system," *Math. and Mech. of Solids,* vol. 22, pp. 1303-1325, 2017.
[19] S. Kitipornchai, L. Ke, J. Yang, and Y. Xiang, "Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams," *Journal of sound and vibration,* vol. 324, pp. 962-982, 2009.
[20] M. J. Khodaei, A. Mehrvarz, N. Candelino, and N. Jalili, "Theoretical and experimental analysis of coupled flexural-torsional vibrations of rotating beams," in *ASME Dyn. Sys. and Con. Conf.*, 2018.
[21] C. Karaagac, H. Öztürk, and M. Sabuncu, "Free vibration and lateral buckling of a cantilever slender beam with an edge crack: experimental and numerical studies," *J. of S. & Vib.*, vol. 326, pp. 235-250, 2009.
[22] J. Gawryluk, A. Mitura, and A. Teter, "Dynamic response of a composite beam rotating at constant speed caused by harmonic excitation with MFC actuator," *Com. Str.,* vol. 210, pp. 657-662, 2019.
[23] J. Chen and Q.-S. Li, "Vibration characteristics of a rotating pre-twisted composite laminated blade," *Com. Str.,* vol. 208, pp. 78-90, 2019.
[24] M. Afshari and D. J. Inman, "Continuous crack modeling in piezoelectrically driven vibrations of an Euler–Bernoulli beam," *J. of Vib. and Con.,* vol. 19, pp. 341-355, 2013.
[25] S.-Q. An, H.-L. Zou, Z.-C. Deng, and W.-P. Hu, "Dynamic analysis on hub–beam system with transient stiffness variation," *Int. J. of Mech. Sci,* vol. 151, pp. 692-702, 2019.
[26] A. Beléndez, A. Hernández, T. Beléndez, M. L. Alvarez, S. Gallego, M. Ortuño, *et al.*, "Application of the harmonic balance method to a nonlinear oscillator typified by a mass attached to a stretched wire," *J. of S.& Vib.,* vol. 302, pp. 1018-1029, 2007.
[27] D. Younesian, H. Askari, Z. Saadatnia, and M. KalamiYazdi, "Frequency analysis of strongly nonlinear generalized Duffing oscillators using He's frequency–amplitude formulation and He's energy balance method," *Com. & Math. with App.,* vol. 59, pp. 3222-3228, 2010.
[28] M. Ghadiri and M. Safi, "Nonlinear vibration analysis of functionally graded nanobeam using homotopy perturbation method," *Adv. in App. Math. and Mech.,* vol. 9, pp. 144-156, 2017.
[29] K. Manimegalai, S. Z. CF, P. Bera, P. Bera, S. Das, and T. Sil, "Study of strongly nonlinear oscillators using the Aboodh transform and the homotopy perturbation method," *The Eur. Phy. J. Plus,* vol. 134, p. 462, 2019.
[30] M. Shishesaz, M. Shariati, A. Yaghootian, and A. Alizadeh, "Nonlinear Vibration Analysis of Nano-Disks Based on Nonlocal Elasticity Theory Using Homotopy Perturbation Method," *Int. J. of App. Mech.,* vol. 11, p. 1950011, 2019.
[31] A. A. Yazdi, "Nonlinear aeroelastic stability analysis of three-phase nano-composite plates," *Mechanics Based Design of Structures and Machines,* vol. 47, pp. 753-768, 2019.
[32] A. Allahverdizadeh, R. Oftadeh, M. Mahjoob, and M. Naei, "Homotopy perturbation solution and periodicity analysis of nonlinear vibration of thin rectangular functionally graded plates," *Acta Mech. Solida Sinica,* vol. 27, pp. 210-220, 2014.
[33] P. Gonçalves, F. Silva, and Z. Del Prado, "Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition," *J. of S. & Vib.,* vol. 315, pp. 641-663, 2008.
[34] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems* vol. 464: Wiley Online Library, 2007.
[35] S. Liao, *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*: CRC press, 2003.